BÀI 11: NGUYÊN HÀM

1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ

Khái niệm nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn, hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Chú ý

Trường hợp $K = [a;b]$ thì các đẳng thức $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại $x = a$ và đạo hàm bên trái tại $x = b$.

Định lí về họ nguyên hàm

Giả sử hàm số F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên K. Khi đó:

a) Với mỗi hằng số C, hàm số F(x) + C cũng là một nguyên hàm của f(x) trên K;

b) Nếu hàm số G(x) là một nguyên hàm của f(x) trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho G(x) = F(x) + C với mọi $x \in K$.

Họ tất cả các nguyên hàm của f(x) trên K được kí hiệu là:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \quad (C \in R)$$

Chú ý

a) Để tìm họ nguyên hàm của $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

b) Nếu hàm số f(x) liên tục trên khoảng K thì f(x) có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$. Vậy $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$.

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm trên tập xác định của nó.

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Tính chất hằng số

$$\int k f(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0)$$

Tính chất tổng và hiệu

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Nguyên hàm của hàm số luỹ thừa

$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$

c) Nguyên hàm của hàm số mũ

$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

$\int 0\mathrm{d}x = C$

$\int 1\mathrm{d}x = x + C$

$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

4. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính nguyên hàm hàm đa thức và luỹ thừa

$$\int (3x^2 - 4x + 1)\mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$= x^3 - 2x^2 + x + C$$

Áp dụng tính chất cộng trừ và nguyên hàm luỹ thừa cơ bản

Ví dụ 2: Tính nguyên hàm hàm phân thức và căn thức

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln|x| + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\ln|x| + 2\sqrt{x} + C$$

Ví dụ 3: Tính nguyên hàm hàm lượng giác

$$\int (2\sin x + 3\cos x)\mathrm{d}x = 2(-\cos x) + 3\sin x + C$$

$$= -2\cos x + 3\sin x + C$$

Sử dụng công thức nguyên hàm trực tiếp của sin và cos

Ví dụ 4: Tính nguyên hàm hàm mũ

$$\int (3\cdot 2^x - 5e^x)dx = 3\cdot\frac{2^x}{\ln 2} - 5e^x + C$$

$$= \frac{3\cdot 2^x}{\ln 2} - 5e^x + C$$

Áp dụng công thức nguyên hàm của hàm số mũ cơ số a và cơ số e