

BÀI 5: DÃY SỐ

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương N^* được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số), kí hiệu là $u = u(n)$ hoặc (u_n) .

Dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển là $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$. Số u_1 gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và gọi là số hạng tổng quát của dãy số. Nếu $u_n = c$ với mọi $n \in N^*$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ với $m \in N^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn. Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, \dots, u_m$, trong đó u_1 gọi là số hạng đầu, u_m gọi là số hạng cuối.

2. CÁC CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

Một dãy số có thể được cho bằng cách liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng).

Ví dụ dãy số cho bằng cách liệt kê: Dãy các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 10 gồm 1, 3, 5, 7, 9.

Một dãy số có thể được cho bằng công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ dãy số cho bằng công thức số hạng tổng quát: Dãy số (u_n) với $u_n = 3n + 1$ ($n \in N^*$).

Một dãy số có thể được cho bằng phương pháp mô tả.

Một dãy số có thể được cho bằng phương pháp truy hồi.

Ví dụ dãy số cho bằng hệ thức truy hồi: Dãy số (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_n = 2u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in N^*$. Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in N^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M$ với mọi $n \in N^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m$ với mọi $n \in N^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in N^*$.

Ví dụ dãy số tăng, giảm và bị chặn: Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$ là dãy số giảm và bị chặn do

$$0 < u_n \leq 1.$$

Dãy số tăng

Dãy số (u_n) với $u_n = 2n+1$ là dãy số tăng vì xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)+1 - (2n+1) = 2 > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$ là dãy số tăng vì có các số hạng dương và tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n+1}$ là dãy số tăng vì hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n$ là dãy số tăng vì có
 $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - (n^2 + n) = 2n+2 > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số giảm

Dãy số (u_n) với $u_n = -3n+5$ là dãy số giảm vì xét hiệu
 $u_{n+1} - u_n = -3(n+1)+5 - (-3n+5) = -3 < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$ là dãy số giảm vì xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ là dãy số giảm vì hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0$ (ngược lại xét $u_n = \frac{n+2}{2n+1}$ hoặc đổi dấu $u_n = \frac{2-n}{n+1}$ cho hiệu âm rõ rệt).

Dãy số (u_n) với $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ là dãy số giảm vì các số hạng đều dương và tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$ bị chặn vì $0 < u_n \leq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (bị chặn dưới bởi 0 và bị chặn trên bởi 1).

Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$ bị chặn vì $\frac{1}{2} \leq u_n < 2$ với mọi $n \in N^*$.

Dãy số (u_n) với $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ bị chặn vì $-1 \leq u_n \leq 1$ với mọi $n \in N^*$.

Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2+3}$ bị chặn vì $0 < \frac{2}{5} \leq u_n < \frac{1}{2}$ với mọi $n \in N^*$.