

BÀI 7: CẤP SỐ NHÂN

1. ĐỊNH NGHĨA

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q . Số q được gọi là công bội của cấp số nhân. Hệ thức truy hồi: $u_n = u_{n-1} \cdot q$ với $n \geq 2$. Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng không đổi:

$a, a, a, \dots$. Phương pháp chứng minh: Dãy (u_n) gồm các số khác 0 là cấp số nhân khi tỉ số $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ không đổi.

Ví dụ định nghĩa cấp số nhân: Cho cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$ viết năm số hạng đầu. Áp dụng công thức truy hồi liên tiếp nhân với công bội q . Tính được $u_1 = 5, u_2 = -10, u_3 = 20, u_4 = -40, u_5 = 80$. Năm số hạng đầu của cấp số nhân là $5, -10, 20, -40, 80$.

Ví dụ nhận biết cấp số nhân: Xét tính chất cấp số nhân của dãy số có số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$

Lập tỉ số giữa hai số hạng liên tiếp với mọi số tự nhiên $n \geq 2$. Biến đổi tỉ số $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1}} : \frac{1}{3^{n-2}} = \frac{1}{3}$

Dãy số là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{3}$.

2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

Ví dụ tìm số hạng tổng quát và số hạng bất kì: Cho cấp số nhân $8, -4, \dots$ tìm số hạng thứ 100.

Xác định số hạng đầu $u_1 = 8$ cùng công bội $q = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$. Áp dụng công thức

$$u_{100} = u_1 \cdot q^{99} = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{99}. \text{ Kết quả số hạng thứ 100 là } -\frac{1}{2^{96}}.$$

Ví dụ xác định cấp số nhân từ dữ kiện số hạng: Cho cấp số nhân số hạng dương biết $u_{10} = 1536$

và $u_{12} = 6144$ tìm u_{20} . Biểu diễn theo công thức tổng quát suy ra $q^2 = \frac{u_{12}}{u_{10}} = 4$. Do số hạng

dương nên $q = 2$, từ đó tìm được $u_1 = 3$. Số hạng thứ 20 cần tìm là $u_{20} = 3 \cdot 2^{19} = 1572864$.

3. TỔNG CỦA n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q . Đặt tổng n số hạng đầu là $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi $q \neq 1$,

công thức tính là: $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$. Khi $q = 1$, tất cả các số hạng đều bằng u_1 , khi đó: $S_n = n \cdot u_1$.

Ví dụ tính số lượng số hạng khi biết tổng: Cần lấy tổng bao nhiêu số hạng đầu của cấp số nhân $2, 6, 18, \dots$ để được kết quả bằng 728. Cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$.

Phương trình tổng $S_n = \frac{2(1-3^n)}{1-3} = 3^n - 1 = 728 \Leftrightarrow 3^n = 729$. Giải ra $n = 6$, vậy cần lấy 6 số hạng đầu.

Ví dụ bài toán thực tế áp dụng tổng cấp số nhân: Chuyên gia có lương năm đầu 240 triệu đồng và mỗi năm sau tăng 5% lương năm trước. Tổng lương sau 10 năm là tổng 10 số hạng đầu của cấp

số nhân có $u_1 = 240, q = 1,05$. Áp dụng công thức $S_{10} = \frac{240 \cdot [1 - (1,05)^{10}]}{1 - 1,05}$. Tổng tiền lương sau

10 năm nhận được làm tròn là 3019 triệu đồng.