

BÀI 6: CẤP SỐ CỘNG

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa cấp số cộng: Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d . Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Hệ thức truy hồi: Dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai d khi và chỉ khi:

$$u_n = u_{n-1} + d \quad (n \geq 2)$$

Cách chứng minh một dãy số (u_n) là cấp số cộng: Chứng minh hiệu hai số hạng liên tiếp là một hằng số không đổi:

$$u_n - u_{n-1} = d \quad (n \geq 2)$$

2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Công thức xác định số hạng tổng quát: Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được tính theo công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \quad (n \geq 2)$$

3. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d . Tổng n số hạng đầu $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ được tính theo các công thức sau:

Công thức 1 (biết số hạng đầu u_1 và công sai d):

$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d]$$

Công thức 2 (biết số hạng đầu u_1 và số hạng thứ n là u_n):

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

Ví dụ 1:

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Hãy viết năm số hạng đầu của cấp số cộng này.

Lời giải:

Ta có:

$$u_1 = 3$$

$$u_2 = u_1 + d = 3 + 4 = 7$$

$$u_3 = u_2 + d = 7 + 4 = 11$$

$$u_4 = u_3 + d = 11 + 4 = 15$$

$$u_5 = u_4 + d = 15 + 4 = 19$$

Vậy năm số hạng đầu của cấp số cộng là 3; 7; 11; 15; 19.

Ví dụ 2:

Cho cấp số cộng (u_n) biết số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Hãy tìm số hạng thứ 20 của cấp số cộng này.

Lời giải:

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng $u_n = u_1 + (n-1)d$, với $n = 20$, ta có:

$$u_{20} = u_1 + (20-1)d$$

$$u_{20} = 2 + 19 \cdot 5$$

$$u_{20} = 2 + 95 = 97$$

Vậy số hạng thứ 20 của cấp số cộng là 97.

Ví dụ 3:

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -1$ và công sai $d = 3$. Hãy tính tổng của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

Lời giải:

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$, với $n = 15$, ta có:

$$S_{15} = \frac{15}{2}[2 \cdot (-1) + (15-1) \cdot 3]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}[-2 + 14 \cdot 3]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}[-2 + 42]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \cdot 40 = 300$$

Vậy tổng của 15 số hạng đầu tiên là 300.

Ví dụ 4:

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 4n - 1$. Chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, từ đó chỉ ra số hạng đầu u_1 và công sai d .

Lời giải: Xét hiệu giữa hai số hạng liên tiếp $u_n - u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$: Ta có:

$$u_{n-1} = 4(n-1) - 1 = 4n - 4 - 1 = 4n - 5 \text{ Suy ra: } u_n - u_{n-1} = (4n - 1) - (4n - 5) = 4n - 1 - 4n + 5 = 4$$

Vì hiệu $u_n - u_{n-1} = 4$ là một hằng số không đổi với mọi $n \geq 2$, nên dãy số (u_n) là một cấp số cộng. Cấp số cộng này có: Số hạng đầu $u_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$ Công sai $d = 4$