

BÀI 12 TÍCH PHÂN

I. Tóm tắt nội dung lý thuyết trọng tâm

1. Khái niệm tích phân:

- Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b của $f(x)$, kí hiệu là:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Tích phân chỉ phụ thuộc vào hàm f và các cận a, b , không phụ thuộc vào biến số:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

- Quy ước: $\int_a^a f(x)dx = 0$ và $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. Ý nghĩa hình học:

- Nếu $f(x) \geq 0$ và liên tục trên $[a; b]$, diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

3. Tính chất của tích phân:

- $\int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (k là hằng số).
- (Tex translation failed).
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ($a < c < b$).

II. Lời giải các phần Thực hành & Luyện tập

1. Bài toán mở đầu (Trang 12) & Vận dụng 1 (Trang 16)

- Đề bài:** Ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì đạp phanh, chuyển động chậm dần đều với $v(t) = -40t + 20$ (m/s). Tính quãng đường đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.
- Lời giải:**
 - Khi ô tô dừng hẳn: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -40t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 0,5$ (s).
 - Quãng đường đi được là tích phân của vận tốc từ 0 đến 0,5:

$$s = \int_0^{0,5} (-40t + 20)dt = \left(-20t^2 + 20t\right)\Big|_0^{0,5} = -20(0,5)^2 + 20(0,5) = 5 \text{ (m)}$$

2. Hoạt động 1 (Trang 13)

- a)** Khi $t = 4$: Hình thang giới hạn bởi $y = x + 1$, trục Ox, $x = 1, x = 4$ có hai đáy là $y(1) = 2$ và $y(4) = 5$, chiều cao $h = 4 - 1 = 3$.

$$S = \frac{(2+5) \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

- **b)** Với $t \in [1; 4]$: Đáy bé $y(1) = 2$, đáy lớn $y(t) = t + 1$, chiều cao $h = t - 1$.

$$S(t) = \frac{(2+t+1)(t-1)}{2} = \frac{(t+3)(t-1)}{2} = \frac{t^2 + 2t - 3}{2}$$

- **c)** Ta có $S'(t) = \left(\frac{t^2 + 2t - 3}{2} \right)' = t + 1 = f(t)$, do đó $S(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$.
 - $S(4) - S(1) = \frac{4^2 + 2(4) - 3}{2} - 0 = \frac{21}{2} = S$.

3. Luyện tập 1 (Trang 14)

- **a)** $\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.
- **b)** $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.
- **c)** $\int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$.
- **d)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = (-\cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\cot \frac{\pi}{3} \right) - \left(-\cot \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} - (-\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. Luyện tập 2 (Trang 16)

- **a)** $\int_1^3 (2x+1)dx$ **bằng ý nghĩa hình học:**
 - Đây là diện tích hình thang vuông giới hạn bởi đường thẳng $y = 2x + 1$, trục Ox , $x = 1$ và $x = 3$.
 - Đáy $y_1 = 2(1) + 1 = 3$, đáy $y_2 = 2(3) + 1 = 7$, chiều cao $h = 3 - 1 = 2$.
 - $S = \frac{(3+7) \cdot 2}{2} = 10 \Rightarrow \int_1^3 (2x+1)dx = 10$.
- **b)** $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ **bằng ý nghĩa hình học:**
 - Phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ tương ứng với nửa trên của hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 2$.
 - Diện tích nửa hình tròn:

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi (2^2) = 2\pi \Rightarrow \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2\pi$$

5. Luyện tập 3 (Trang 17)

- **a)** $\int_0^{2\pi} (2x + \cos x) dx = (x^2 + \sin x) \Big|_0^{2\pi} = ((2\pi)^2 + \sin(2\pi)) - 0 = 4\pi^2$.

- b) $\int_1^3 \left(3^x - \frac{3}{x} \right) dx = \left(\frac{3^x}{\ln 3} - 3 \ln |x| \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{27}{\ln 3} - 3 \ln 3 \right) - \left(\frac{3}{\ln 3} - 0 \right) = \frac{24}{\ln 3} - 3 \ln 3.$
- c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = (\tan x + \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}:$
 - Tại $x = \frac{\pi}{3}$: $\tan \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$
 - Tại $x = \frac{\pi}{6}$: $\tan \frac{\pi}{6} + \cot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$
 - Giá trị tích phân bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 0.$

6. Luyện tập 4 (Trang 17)

- Tính $\int_0^3 |2x - 3| dx$:
 - Điểm làm đổi dấu: $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in (0; 3).$
 - Tách cận:

$$\int_0^3 |2x - 3| dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (3 - 2x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 (2x - 3) dx$$

- $\int_0^{\frac{3}{2}} (3 - 2x) dx = (3x - x^2) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = 3 \left(\frac{3}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}.$
- $\int_{\frac{3}{2}}^3 (2x - 3) dx = (x^2 - 3x) \Big|_{\frac{3}{2}}^3 = (9 - 9) - \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} \right) = \frac{9}{4}.$
- Tổng giá trị: $\frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2} = 4,5.$

7. Vận dụng 2 (Trang 17)

- **Đề bài:** Nhiệt độ mô hình hoá bởi $T(t) = 20 + 1,5(t - 6)$ với $6 \leq t \leq 12$. Tìm nhiệt độ trung bình từ 6 giờ đến 12 giờ.
- **Lời giải:**

(Tex translation failed)

Đặt $u = t - 6 \Rightarrow du = dt$; khi $t = 6 \Rightarrow u = 0$, khi $t = 12 \Rightarrow u = 6$:

$$T_{\text{tb}} = \frac{1}{6} \int_0^6 (20 + 1,5u) du = \frac{1}{6} \left(20u + 1,5 \cdot \frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^6 = \frac{1}{6} (20 \cdot 6 + 0,75 \cdot 36) = \frac{1}{6} (120 + 27) = \frac{147}{6} = 24,5^\circ \text{C}$$