

BÀI 8. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

1. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTO, PHÉP TRỪ HAI VECTO, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO

Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z')$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z')$$

$$k\vec{a} = (kx; ky; kz) \text{ với } k \text{ là một số thực}$$

$$\text{Vectơ đối của } \vec{a} = (x; y; z) \text{ là } -\vec{a} = (-x; -y; -z).$$

Hai vectơ cùng phương:

Vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho:

$$\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases}$$

Toạ độ trung điểm đoạn thẳng và toạ độ trọng tâm tam giác:

Cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$.

Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB là:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

Ví dụ 1:

Cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(3; 0; -1)$.

Toạ độ vectơ $\vec{AB} = (3 - 1; 0 - 2; -1 - 3) = (2; -2; -4)$.

Trung điểm M của đoạn thẳng AB có toạ độ là $M\left(\frac{1+3}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{3+(-1)}{2}\right) = (2; 1; 1)$.

Vectơ $2\vec{AB}$ có toạ độ là $2 \cdot (2; -2; -4) = (4; -4; -8)$.

2. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vector $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$$

Các ứng dụng của tích vô hướng:

Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx' + yy' + zz' = 0$.

Độ dài vector:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Góc giữa hai vector khác $\vec{0}$:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Khoảng cách giữa hai điểm:

Với $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$, độ dài đoạn thẳng AB là:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Khoảng cách từ điểm A đến gốc toạ độ O:

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

Ví dụ 2:

Cho hai vector $\vec{u} = (1; 2; 2)$ và $\vec{v} = (2; -1; 0)$.

Tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0$.

Độ dài vector $\vec{u}$ là $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$.

Vì $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ nên góc giữa hai vector là $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.

3. VẬN DỤNG TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Thiết lập hệ trục toạ độ Oxyz thích hợp để mô hình hoá vị trí của các vật thể trong không gian thực tế (chọn gốc toạ độ O và hướng của các trục Ox, Oy, Oz).

Xác định toạ độ các điểm mốc, vị trí vật thể dựa vào các thông số hình học và khoảng cách thực tế.

Vận dụng các công thức tọa độ vector:

Tính khoảng cách giữa hai vị trí bằng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm.

Xác định vị trí, phương hướng chuyển động nhờ các phép cộng, trừ vector và nhân vector với một số thực.

Tính góc lệch, độ dốc bằng công thức cosin góc giữa hai vector.

Ví dụ 3:

Một trạm kiểm soát không lưu đặt tại gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ theo dõi hai máy bay.

Tại cùng thời điểm, máy bay thứ nhất ở $A(2; 3; 1)$ và máy bay thứ hai ở $B(5; 7; 1)$ với đơn vị đo là km.

Vector vị trí tương đối giữa hai máy bay là $\overrightarrow{AB} = (5 - 2; 7 - 3; 1 - 1) = (3; 4; 0)$.

Khoảng cách giữa hai máy bay khi đó là $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5 \text{ km}$.