

BÀI 6. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Quy ước kí hiệu trong tam giác ABC

Kí hiệu các góc tại các đỉnh tương ứng là $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$

Độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C tương ứng là a, b, c

Kí hiệu p là nửa chu vi tam giác với $p = \frac{a+b+c}{2}$

Kí hiệu S là diện tích, R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác

1. ĐỊNH LÝ CÔSIN

a) Định lý côsin

Trong tam giác ABC bất kì:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Ví dụ minh họa

Cho tam giác ABC có $b=5$, $c=8$ và $\hat{A}=60^\circ$

Tính độ dài cạnh a

Áp dụng định lý côsin: $a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 25 + 64 - 40 = 49$

Suy ra độ dài cạnh $a = \sqrt{49} = 7$

b) Hệ quả

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ví dụ minh họa

Cho tam giác ABC có ba cạnh $a=7$, $b=5$, $c=3$

Tính số đo góc $\hat{A}$ của tam giác

$$\text{Áp dụng hệ quả: } \cos A = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{25 + 9 - 49}{30} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra số đo góc $\hat{A} = 120^\circ$

2. ĐỊNH LÝ SIN

Trong tam giác ABC bất kì với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Các công thức hệ quả suy ra:

$$a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$

Ví dụ minh họa

Cho tam giác ABC có cạnh $a = 6$ và $\hat{A} = 30^\circ$

Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác

$$\text{Áp dụng công thức: } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{6}{2 \sin 30^\circ} = \frac{6}{2 \cdot 0,5} = 6$$

Kết luận bán kính $R = 6$

3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

a) Định nghĩa

Giải tam giác là việc tính độ dài các cạnh và số đo các góc của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó

b) Các trường hợp thường gặp

Biết hai cạnh và góc xen giữa

Biết ba cạnh

Biết một cạnh và hai góc kề

Ví dụ minh họa

Cho tam giác ABC biết $c = 14$, $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$

Tìm góc $\hat{C}$ và tính độ dài hai cạnh a, b

$$\text{Số đo góc } \hat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$$

$$\text{Độ dài cạnh } a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 12,31$$

$$\text{Độ dài cạnh } b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 9,14$$

4. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

a) Công thức diện tích theo hai cạnh và sin của góc xen giữa

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

Ví dụ minh họa

Cho tam giác ABC có $b = 6$, $c = 4$ và $\hat{A} = 150^\circ$

Tính diện tích S của tam giác ABC

$$\text{Áp dụng công thức: } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 150^\circ$$

$$\text{Kết quả } S = 12 \cdot 0,5 = 6$$

b) Công thức diện tích theo bán kính đường tròn ngoại tiếp

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Ví dụ minh họa

Cho tam giác ABC có ba cạnh $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$ và $R = 5$

Tính diện tích S của tam giác ABC

$$\text{Áp dụng công thức: } S = \frac{abc}{4R} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 5}$$

$$\text{Kết quả } S = \frac{480}{20} = 24$$

c) Công thức diện tích theo bán kính đường tròn nội tiếp

$$S = pr = \frac{(a+b+c)r}{2}$$

Ví dụ minh họa

Cho tam giác ABC có ba cạnh $a=5$, $b=6$, $c=7$ và $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Nửa chu vi tam giác: $p = \frac{5+6+7}{2} = 9$

Áp dụng công thức: $S = pr = 9 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

Kết quả diện tích tam giác là $S = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

d) Công thức Heron

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{vì } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Ví dụ minh họa

Cho tam giác ABC có ba cạnh $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$

Nửa chu vi tam giác: $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$

Áp dụng công thức Heron: $S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$

Kết quả diện tích tam giác là $S = 84$