

BÀI 6: VECTO TRONG KHÔNG GIAN

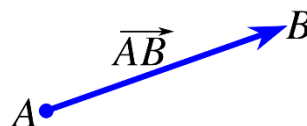
1. VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Khái niệm: Vecto trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ: Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Vecto có điểm đầu A , điểm cuối B kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.



Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

Giá của vectơ: Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.

Vecto cùng phương, cùng hướng:

Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng *cùng hướng* hoặc *ngược hướng*.

Hai vectơ bằng nhau: Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *bằng nhau*, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Vecto-không: Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau (như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$) gọi là các *vectơ-không*, kí hiệu chung là $\vec{0}$. Vectơ $\vec{0}$ có độ dài bằng 0 và cùng hướng với mọi vectơ.

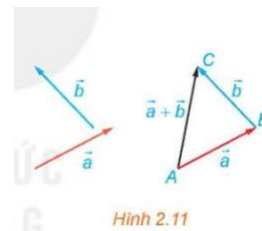
Tính chất: Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

Định nghĩa: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

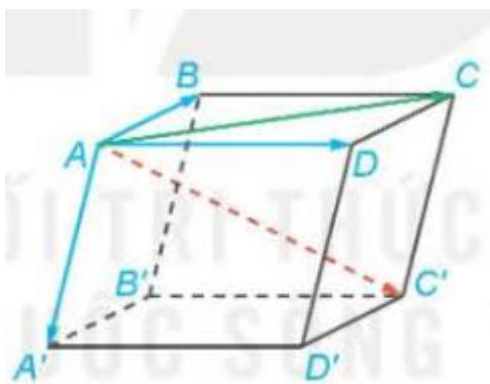
Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$



Hình 2.14

Tính chất của phép cộng vector:

Giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

- Kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- Cộng với vector $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

b) Hiệu của hai vector trong không gian

Vector đối: Vector có cùng độ dài và ngược hướng với vector $\vec{a}$ được gọi là *vector đối* của $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Vector đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Hai vector là đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Định nghĩa hiệu: Vector $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Nhận xét: Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có:

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

Định nghĩa: Tích của một số thực $k \neq 0$ với một vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.

Điều kiện cùng phương: Điều kiện cần và đủ để hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Tính chất:

$$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$$

$$(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$1\vec{a} = \vec{a} \text{ và } (-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

Chú ý:

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tùy ý, ta có: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$.

Nếu I là trọng tâm của tứ diện ABCD thì: $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$.

4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

a) Góc giữa hai vector trong không gian

Định nghĩa: Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và vẽ $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc AOB ($0^\circ \leq AOB \leq 180^\circ$) được gọi là *góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$* , kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Vector vuông góc: Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$.

b) Tích vô hướng của hai vector trong không gian

Định nghĩa: Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Quy ước: Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Tính chất & Công thức liên quan:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ (với } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{)}$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\text{Với } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}: \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$