

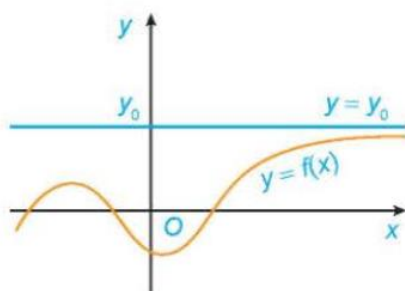
BÀI 3: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Đường tiệm cận ngang

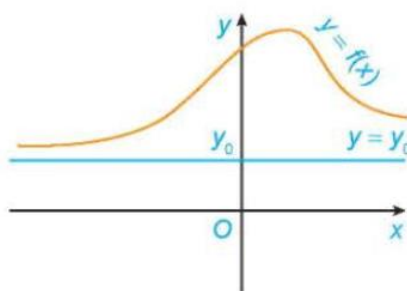
Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng dạng $(-\infty; a)$ hoặc $(b; +\infty)$.

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Ví dụ 1

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x+1}$.

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}, \{-1\}$.

Ta xét giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3.$$

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

2. Đường tiệm cận đứng

Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ hoặc có tập xác định chứa ít nhất một khoảng dạng $(x_0; b)$ hoặc $(a; x_0)$.

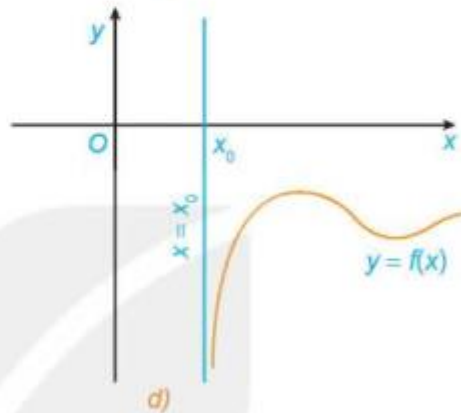
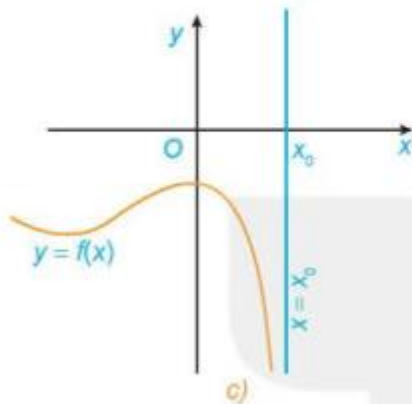
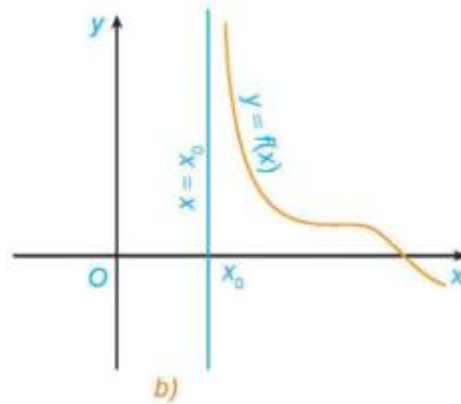
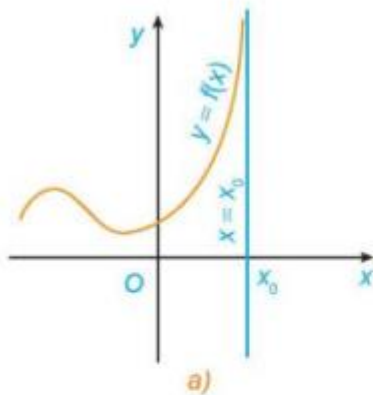
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$



a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^-$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^+$).

Ví dụ 2

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3-x}{x+2}$.

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}, \{-2\}$.

Ta xét giới hạn của hàm số tại điểm $x_0 = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3-x}{x+2} = +\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -2^+} (3-x) = 5 > 0 \text{ và } x+2 > 0 \text{ khi } x > -2.$$

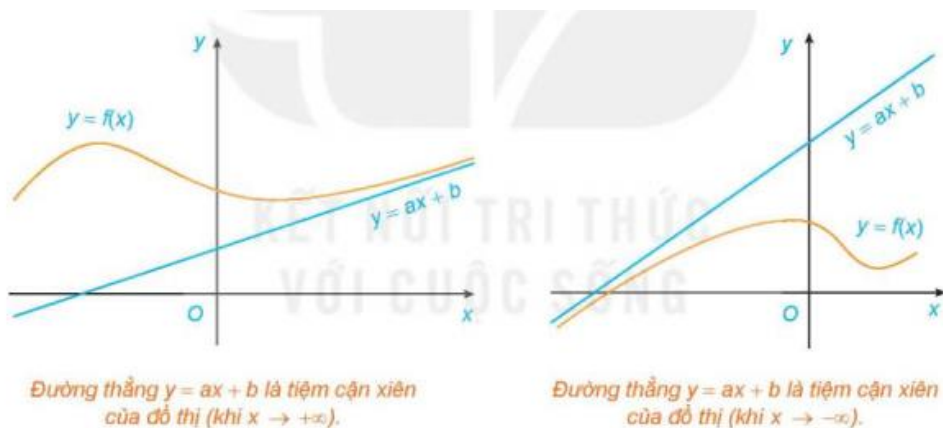
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3-x}{x+2} = -\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -2^-} (3-x) = 5 > 0 \text{ và } x+2 < 0 \text{ khi } x < -2.$$

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

3. Đường tiệm cận xiên

Định nghĩa

Đường thẳng $y = ax + b$ với $a \neq 0$ được gọi là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.



Cách tìm đường tiệm cận xiên

Nếu đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$ thì các hệ số a và b được tính như sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$$

Ví dụ 3

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$.

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}, \{-1\}$.

Thực hiện phép chia đa thức tử số cho mẫu số ta được:

$$y = x - 2 + \frac{4}{x+1}.$$

Xét giới hạn của hiệu giữa hàm số và đường thẳng $y = x - 2$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x+1} = 0.$$

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.