

BÀI 2 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D .

Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi $x \in D$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D . Kí hiệu là $M = \max_D f(x)$.

Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ với mọi $x \in D$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D . Kí hiệu là $m = \min_D f(x)$.

PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1. Tìm GLNHT, GTNN của hàm số trên một khoảng hoặc nửa khoảng

Tìm tập xác định và tính đạo hàm $f'(x)$.

Tìm các điểm x_i tại đó đạo hàm $f'(x) = 0$ hoặc đạo hàm không xác định.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng hoặc nửa khoảng đó.

Căn cứ vào bảng biến thiên để kết luận giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

2. Tìm GLNHT, GTNN của hàm số liên tục trên một đoạn $[a; b]$

Tính đạo hàm $f'(x)$.

Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc đạo hàm không xác định.

Tính các giá trị $f(a)$, $f(b)$ và $f(x_i)$.

So sánh các giá trị đã tính. Số lớn nhất trong các giá trị đó là GLNHT, số nhỏ nhất là GTNN.

VÍ DỤ MINH HỌA

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 3]$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 3]$.

Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$ (cả hai đều thuộc đoạn $[-1; 3]$).

Tính các giá trị tại hai đầu mút và các điểm cực trị:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -3$$

$$f(3) = 3^3 - 3(3)^2 + 1 = 1$$

$$f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 1 = 1$$

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 1 = -3$$

So sánh các giá trị, ta kết luận:

$$\max_{[-1;3]} f(x) = 1 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = 3.$$

$$\min_{[-1;3]} f(x) = -3 \text{ tại } x = -1 \text{ và } x = 2.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}.$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (do } x \in (0; +\infty) \text{)}.$$

Lập bảng biến thiên trên khoảng $(0; +\infty)$:

Với $0 < x < 2$ thì $f'(x) < 0$, hàm số nghịch biến đi xuống.

Với $x > 2$ thì $f'(x) > 0$, hàm số đồng biến đi lên.

Tại điểm $x = 2$, giá trị của hàm số là $f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$.

x	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x = 2$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng này vì khi $x \rightarrow 0^+$ hoặc $x \rightarrow +\infty$ thì $f(x) \rightarrow +\infty$.

Kết luận: $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 4$ tại $x = 2$, không tồn tại giá trị lớn nhất.