

BÀI 2: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. CÔNG THỨC CỘNG

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Hệ quả nâng cao cần nhớ:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI VÀ HẠ BẬC

Công thức nhân đôi:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

3. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

Ví dụ minh họa (Cách trình bày lời giải)

Ví dụ 1: Tính giá trị $\cos 75^\circ$ không dùng máy tính.

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Ví dụ bổ sung cho Công thức cộng

Ví dụ: Tính giá trị của biểu thức $A = \sin 15^\circ$ không dùng máy tính.

Ta viết $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ và áp dụng công thức cộng cho sin.

$$A = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$A = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Ví dụ bổ sung cho Công thức nhân đôi và hạ bậc

Ví dụ: Cho góc a thỏa mãn $\sin a = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính giá trị của $\sin 2a$ và $\cos^2 a$.

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$. Ta có $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$.

Áp dụng công thức nhân đôi, ta tính được giá trị cần tìm.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

Áp dụng công thức hạ bậc hoặc tính trực tiếp từ bình phương góc đơn.

$$\cos^2 a = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

Ví dụ bổ sung cho Công thức biến đổi tích thành tổng

Ví dụ: Rút gọn biểu thức $B = \sin 5x \cos 3x - \frac{1}{2} \sin 8x$.

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng cho cụm đầu tiên.

$$\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2} [\sin(5x - 3x) + \sin(5x + 3x)] = \frac{1}{2} (\sin 2x + \sin 8x)$$

Thay vào biểu thức ban đầu để rút gọn.

$$B = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 8x - \frac{1}{2} \sin 8x$$

$$B = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Ví dụ bổ sung cho Công thức biến đổi tổng thành tích

Ví dụ: Rút gọn biểu thức $C = \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$.

Áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích cho cả tử số và mẫu số.

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} = 2 \sin 2x \cos(-x) = 2 \sin 2x \cos x$$

$$\cos x + \cos 3x = 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} = 2 \cos 2x \cos(-x) = 2 \cos 2x \cos x$$

Lập tỷ số giữa tử và mẫu để thu được kết quả cuối cùng.

$$C = \frac{2 \sin 2x \cos x}{2 \cos 2x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$