

BÀI 1: TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

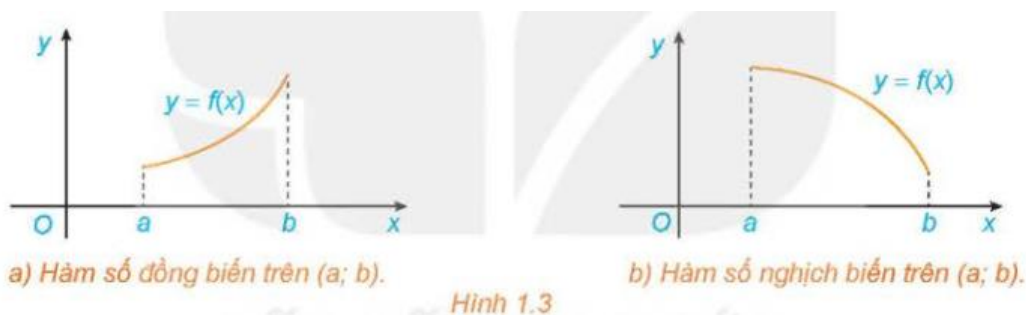
I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Nhắc lại định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K (với K có thể là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng).

Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$ sao cho $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$ sao cho $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.



2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số không đổi (hàm hằng) trên khoảng K .

Mở rộng: Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng K .

4. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

Tính đạo hàm $f'(x)$, tìm các điểm x_i tại đó $f'(x) = 0$ hoặc đạo hàm không xác định.

Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên xét dấu của $f'(x)$.

Dựa vào bảng biến thiên để kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^3 - 3x$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$ và đạo hàm $y' = 3x^2 - 3$

Phương trình $y' = 0$ tương đương với $x = 1$ hoặc $x = -1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y					

Đạo hàm $y' > 0$ trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, đạo hàm $y' < 0$ trên khoảng $(-1; 1)$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1), (1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

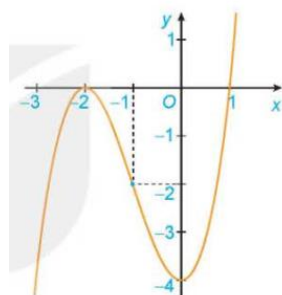
II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa cực đại và cực tiểu

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng K chứa điểm x_0 .

Nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 và thuộc K sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b)$, $\{x_0\}$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

Nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 và thuộc K sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b)$, $\{x_0\}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .



Hình 1.7

Điểm x_0 gọi là điểm cực đại (hoặc điểm cực tiểu) của hàm số; $f(x_0)$ gọi là giá trị cực đại (hoặc giá trị cực tiểu) của hàm số; điểm $M(x_0; f(x_0))$ thuộc đồ thị gọi là điểm cực đại (hoặc điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Cho hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .

Nếu hàm số có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Lưu ý: Đạo hàm có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số không đạt cực trị tại đó, hoặc hàm số vẫn có thể đạt cực trị tại điểm mà đạo hàm không xác định.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị (Dấu hiệu I)

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$.

Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 (đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_0).

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực đại)	

Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 (đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0).

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực tiểu)	

4. Định lý mở rộng về cực trị (Dấu hiệu II)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai liên tục trong khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 .

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

5. Quy tắc tìm cực trị của hàm số

Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

Tính đạo hàm $f'(x)$, tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc đạo hàm không xác định.

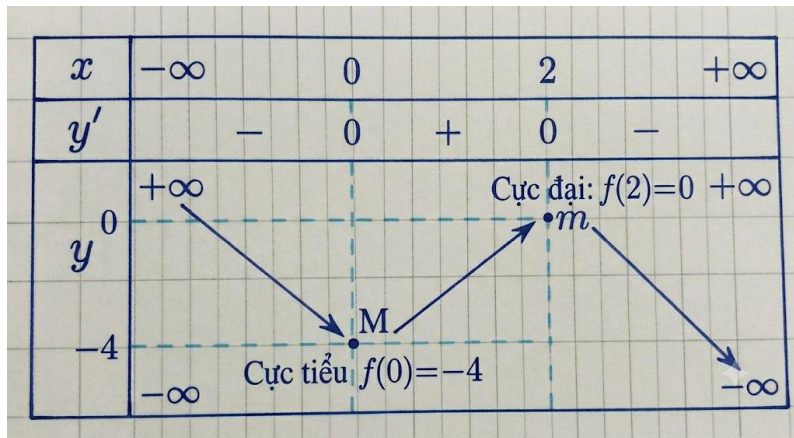
Lập bảng biến thiên hoặc sử dụng đạo hàm cấp hai để xét tính đổi dấu của đạo hàm.

Kết luận về các điểm cực trị và giá trị cực trị tương ứng của hàm số.

Ví dụ tìm cực trị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$ và đạo hàm cấp một $y' = -3x^2 + 6x$

Giải phương trình $y' = 0$ thu được hai nghiệm phân biệt $x = 0$ hoặc $x = 2$



Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 0$ và đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = 2$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ với $y_{CT} = -4$ và đạt cực đại tại $x = 2$ với $y_{CD} = 0$