

BÀI TẬP GIÁO KHOA

Thầy giáo : Nguyễn Quốc Tùng

Toán 11

Bài 32

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Bài 1:

Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{(2x+1)'(x-3) - (2x+1)(x-3)'}{(x-3)^2}$$

$$y' = \frac{2(x-3) - (2x+1) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$$

Tại $x=1$ (thỏa mãn ĐKXD), ta có:

$$y'(1) = \frac{-7}{(1-3)^2} = \frac{-7}{4}$$

Vậy $y'(1) = -7/4$.

Bài 2:

$f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2-3x+3)'(x-1) - (x^2-3x+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2-3x+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-3x+3-x^2+3x-3}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Giá trị của $f'(2)$ là:

$$f'(2) = \frac{2^2-2 \cdot 2}{(2-1)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Vậy $f'(2) = 0$.

Bài 3:

$y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+3x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Xét $y' \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \leq 0$. Vì $(x+1)^2 > 0$ với mọi $x \neq -1$, ta có:

$$x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x+2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$$

Kết hợp điều kiện $x \neq -1$, tập nghiệm là: $S = [-2; 0], \{-1\}$.

Bài 4:

$$g(x) = \frac{1-2x}{x^2+1}. \text{ Tập xác định: } D = \mathbb{R}.$$

$$g'(x) = \frac{-2(x^2+1) - (1-2x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 - 2x + 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vì đây là hai nghiệm đơn của tử số và mẫu số luôn dương, nên $g'(x)$ sẽ đổi dấu khi đi qua hai điểm này.

Bài 5:

$$y = \frac{2x-1}{x+1}. \text{ Giao điểm với trục hoành (cho } y=0): 2x-1=0 \Rightarrow x=1/2.$$

Điểm tiếp xúc là $M(1/2; 0)$.

$$y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$\text{Hệ số góc tại } x=1/2: k = y'(1/2) = \frac{3}{(1/2+1)^2} = \frac{3}{9/4} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến: } y-0 = \frac{4}{3}(x-1/2) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Bài 6:

$$h(x) = \frac{ax+b}{x-2} \Rightarrow h'(x) = \frac{a(x-2) - (ax+b)}{(x-2)^2} = \frac{-2a-b}{(x-2)^2}.$$

$$\text{Đồ thị qua } A(1;1) \Rightarrow h(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{1-2} = 1 \Leftrightarrow a+b = -1 \quad (1)$$

$$\text{Đạo hàm tại } x=1 \text{ bằng } -3 \Rightarrow h'(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{-2a-b}{(1-2)^2} = -3 \Leftrightarrow -2a-b = -3 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) ta được: $-a = -4 \Rightarrow a = 4$.

Thay vào (1): $4+b = -1 \Rightarrow b = -5$.

Vậy $a = 4, b = -5$.

Bài 7:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}. \text{ Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

$$y' = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2 + 2x + 2)}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2 - (x^2 + 2x + 2)}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 + 4x + 2 - x^2 - 2x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Kết quả tối giản: $y' = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Bài 8:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4}. \text{ Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}.$$

Sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$:

$$y' = \frac{-(x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Bài 9:

$$y = \frac{3x - 2}{x - 1}. \text{ Tiếp tuyến song song với } d: y = -x + 5 \Rightarrow \text{ hệ số góc } k = -1.$$

Ta có: $y' = \frac{3(x-1) - (3x-2)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

Giải phương trình $y' = -1$:

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases}$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow$ Điểm $M_1(2; 4)$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ Điểm $M_2(0; 2)$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn là (2;4) và (0;2).

Bài 10:

$$f(x) = \frac{x^2 + mx}{x-1}. \text{ Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$f'(x) = \frac{(2x+m)(x-1) - (x^2 + mx)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + mx - m - x^2 - mx}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - m}{(x-1)^2}$$

Đề $f'(2) = 0$:

$$\frac{2^2 - 2 \cdot 2 - m}{(2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 4 - m}{1} = 0 \Leftrightarrow -m = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = 0$.

