

BÀI TẬP GIÁO KHOA

Thầy giáo : Nguyễn Quốc Tùng

Toán 11

Bài 31

ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA
CỦA ĐẠO HÀM

Bài 9.1. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số

Sử dụng công thức: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$

- Ta có: $f(1) = 1^2 - 1 = 0$.
- $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 - (1 + \Delta x) - 0 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 - \Delta x = (\Delta x)^2 + \Delta x$.
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 1$.
- $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 1) = 1$.

b) $y = -x^3$ tại $x_0 = -1$

- Ta có: $f(-1) = -(-1)^3 = 1$.
- $\Delta y = f(-1 + \Delta x) - f(-1) = -(-1 + \Delta x)^3 - 1 = -(-1 + 3\Delta x - 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - 1 = -3\Delta x + 3(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3$.
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -3 + 3\Delta x - (\Delta x)^2$.
- $f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-3 + 3\Delta x - (\Delta x)^2) = -3$.

Bài 9.2. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = kx^2 + c$

- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = k(x + \Delta x)^2 + c - (kx^2 + c) = k(2x\Delta x + (\Delta x)^2) = 2kx\Delta x + k(\Delta x)^2$.
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2kx + k\Delta x$.
- $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2kx + k\Delta x) = 2kx$.

b) $y = x^3$

- $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.
- $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$.

Bài 9.3. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = -x^2 + 4x$

Đạo hàm: $y' = -2x + 4$.

a) Tại tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 1$

- Tung độ tiếp điểm: $y_0 = -(1)^2 + 4(1) = 3$.
- Hệ số góc: $k = y'(1) = -2(1) + 4 = 2$.
- Phương trình tiếp tuyến: $y = 2(x-1) + 3 \Rightarrow \mathbf{y = 2x + 1}$.

b) Tại tiếp điểm có tung độ $y_0 = 0$

- Giải $-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.
- **TH1:** $x_0 = 0$. $k = y'(0) = 4$. PTTT: $y = 4(x-0) + 0 \Rightarrow \mathbf{y = 4x}$.
- **TH2:** $x_0 = 4$. $k = y'(4) = -4$. PTTT: $y = -4(x-4) + 0 \Rightarrow \mathbf{y = -4x + 16}$.

Bài 9.4. Vận tốc khi vật chạm đất

- Phương trình chuyển động: $h = 19,6t - 4,9t^2$.
- Vận tốc tức thời là đạo hàm của quãng đường: $v(t) = h'(t) = 19,6 - 9,8t$.
- Vật chạm đất khi $h = 0 \Rightarrow 19,6t - 4,9t^2 = 0 \Rightarrow t = 4$ (giây) (loại $t = 0$).
- Vận tốc khi chạm đất: $v(4) = 19,6 - 9,8(4) = \mathbf{-19,6 \text{ m/s}}$ (dấu âm thể hiện hướng đi xuống).

Bài 9.5. Bài toán thiết kế đường ray tàu lượn

Hàm số: $y = ax^2 + bx + c$. Đạo hàm: $y' = 2ax + b$.

a) Tìm c

- Vì gốc tọa độ đặt tại P , nên đồ thị đi qua $P(0;0)$. Thay vào hàm số: $0 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow \mathbf{c = 0}$.

b) Tính $y'(0)$ và tìm b

- Tại $P(0;0)$, tiếp tuyến L_1 có hệ số góc là $0,5$.
- Do đó $y'(0) = 0,5$.
- Mà $y'(0) = 2a(0) + b = b$. Vậy $\mathbf{b = 0,5}$.

c) Tìm a

- Khoảng cách ngang giữa P và Q là 40m , nên hoành độ của Q là $x_Q = 40$.
- Tại $Q(40; y_Q)$, tiếp tuyến L_2 có hệ số góc là $-0,75$.
- Ta có $y'(40) = -0,75 \Rightarrow 2a(40) + 0,5 = -0,75$.
- $80a = -1,25 \Rightarrow \mathbf{a = -0,015625}$ (hay $a = -1/64$).

d) Tìm chênh lệch độ cao giữa P và Q

- Độ cao tại P là $y_P = 0$.

- Độ cao tại Q là $y_Q = a(40)^2 + b(40) = -0,015625(1600) + 0,5(40) = -25 + 20 = -5$.
- Chênh lệch độ cao giữa P và Q là: $|y_P - y_Q| = |0 - (-5)| = 5 \text{ m}$.

