BÀI GIẢNG GIÁO KHOA

Thầy giáo : Nguyễn Quốc Tùng

BÀI 31: ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

a) Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là **đạo hàm** của hàm số tại điểm x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

b) Các bước tính đạo hàm bằng định nghĩa:

- **Bước 1:** Tính $f(x) - f(x_0)$.
- **Bước 2:** Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- **Bước 3:** Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chú ý: Nếu đặt $h = x - x_0$ (số gia của đối số), ta có công thức:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số bậc hai tại một điểm cụ thể

Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 1$.

Giải:

Xét số gia của đối số $h = x - 1$, khi $x \to 1$ thì $h \to 0$.

Ta có $f(1) = 1^2 + 2(1) = 3$.

Tính $f(1+h) = (1+h)^2 + 2(1+h) = 1 + 2h + h^2 + 2 + 2h = h^2 + 4h + 3$.

Lập tỉ số $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{h^2 + 4h + 3 - 3}{h} = \dfrac{h(h+4)}{h} = h + 4$.

Tính giới hạn $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0}(h + 4) = 4$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm hằng

Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=c$ (c là hằng số) tại điểm x_0 bất kỳ.

Giải:

Giả sử x_0 là một điểm bất kỳ thuộc tập xác định.

Ta có $f(x)=c$ và $f(x_0)=c$.

Lập tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$ (với mọi $x\neq x_0$).

Tính giới hạn $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}0=0$.

Vậy đạo hàm của hàm hằng luôn bằng 0.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số bậc nhất

Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=3x-5$ tại điểm x_0 bất kỳ.

Giải:

Lấy x_0 tùy ý, ta có $f(x_0)=3x_0-5$.

Xét hiệu $f(x)-f(x_0)=(3x-5)-(3x_0-5)=3(x-x_0)$.

Lập tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{3(x-x_0)}{x-x_0}=3$ (với mọi $x\neq x_0$).

Tính giới hạn $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}3=3$.

Kết luận $f'(x)=3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm phân thức đơn giản

Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}$ tại điểm $x_0\neq 0$.

Giải:

Xét tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}}{x-x_0}$.

Rút gọn tử số $\dfrac{x_0-x}{xx_0}=-\dfrac{x-x_0}{xx_0}$.

Khi đó tỉ số trở thành $\frac{-(x-x_0)}{xx_0(x-x_0)}=-\frac{1}{xx_0}$.

Tính giới hạn $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{xx_0}\right)=-\frac{1}{x_0^2}$.

Vậy đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{x}$ là $y'=-\frac{1}{x^2}$.

2. Đạo hàm trên một khoảng

Hàm số y = f(x) được gọi là có đạo hàm trên khoảng (a; b) nếu nó có đạo hàm f'(x) tại mọi điểm x thuộc khoảng đó.

Ký hiệu: y' = f'(x).

3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

- **Vận tốc tức thời:** Nếu phương trình chuyển động là $s=f(t)$ thì vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 là $v(t_0)=s'(t_0)$.
- **Cường độ dòng điện tức thời:** Nếu điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q=Q(t)$ thì cường độ dòng điện tức thời tại thời điểm t_0 là $I(t_0)=Q'(t_0)$.

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

a) Tiếp tuyến của đường cong phẳng:

Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là **hệ số góc** của tiếp tuyến M_0T của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$.

$k=f'(x_0)$

b) Phương trình tiếp tuyến:

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;y_0)$ là:

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

Trong đó $y_0=f(x_0)$.


See You Again !