BÀI TẬP GIÁO KHOA

Thầy giáo : Nguyễn Quốc Tùng

Bài 1

Ta có BB' // DD' và BB' = DD' nên BDD'B' là hình bình hành, suy ra BD // B'D'.

Do đó (AC, B'D') = (AC, BD).

Vì ABCD là hình vuông nên $AC \perp BD$ tại tâm O.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và B'D' bằng 90°.

Bài 2

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và BC. Khi đó MQ // AB và NQ // CD là sai, ta gọi lại: Gọi P là trung điểm AC.

Ta có $NP//CD$ và $NP = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$; $MP//AB$ và $MP = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác MNP có $cos MPN = \frac{MP^2 + NP^2 - MN^2}{2 \cdot MP \cdot NP} = \frac{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}$.

Suy ra $MPN = 120^\circ$. Do góc giữa hai đường thẳng luôn $\leq 90^\circ$ nên $(AB, CD) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Bài 3

Xét tích vô hướng $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$.

Ta có $SA \cdot SC \cdot cos ASC - SA \cdot SB \cdot cos ASB = 0$ (vì các cạnh bên và các góc ở đỉnh bằng nhau).

Vì $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên $SA \perp BC$.

Chứng minh tương tự ta được $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$.

Bài 4

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ với $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{AB'} = \vec{b} + \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC'} = \vec{c} + \vec{a} - \vec{b}$.

Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = (\vec{b} + \vec{a})(\vec{c} + \vec{a} - \vec{b}) = \vec{b}\vec{c} + \vec{b}\vec{a} - \vec{b}^2 + \vec{a}\vec{c} + \vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} = \frac{a^2}{2} - a^2 + a^2 = \frac{a^2}{2}$.

Độ dài $AB' = BC' = a\sqrt{2}$. Vậy $cos(AB', BC') = \frac{|\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}|}{AB' \cdot BC'} = \frac{a^2/2}{2a^2} = \frac{1}{4}$.

Bài 5

Giả sử cạnh của tứ diện đều là a. Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Vì M là trung điểm BC nên $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BAM=30^\circ$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot cos30^\circ=\dfrac{3a^2}{4}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=a^2\cdot cos60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM}=\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{4}$. Tính được $DM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $cos(AB,DM)=\dfrac{a^2/4}{a\cdot a\sqrt{3}/2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Bài 6

Vì ABCD là hình vuông nên $CD//AB$, do đó $(SA,CD)=(SA,AB)=SAB$.

Xét tam giác SAB có $SA=SB=AB=a\sqrt{2}$ là sai, đề cho $AB=a, SA=a\sqrt{2}, SB=a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác SAB: $cosSAB=\dfrac{SA^2+AB^2-SB^2}{2\cdot SA\cdot AB}=\dfrac{2a^2+a^2-2a^2}{2\cdot a\sqrt{2}\cdot a}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy góc giữa SA và CD là $arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Bài 7

Ta có $AB\perp CD\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Lại có $AC\perp BD\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

Vậy $AD\perp BC$.

Bài 8

Chọn hệ trục tọa độ hoặc dùng vector: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B'D'}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=AD^2-AB^2=(a\sqrt{2})^2-a^2=a^2$.

Độ dài $AC=\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}=a\sqrt{3}$ và $B'D'=\sqrt{(a\sqrt{2})^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

$cos(AC,B'D')=\dfrac{a^2}{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$. Vậy góc cần tìm là $arccos\dfrac{1}{3}$.

Bài 9

Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c}$ đôi một vuông góc tại S là sai, chỉ có $SA\perp SB, SA\perp SC$.

$\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB})$ và $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}$.

$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB})(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SB}\overrightarrow{SC}-SB^2)=\frac{1}{2}(0-0+SB\cdot SC\cdot cosBSC-a^2)$.

Để tính tiếp cần góc BSC, nếu không có ta dùng độ dài: $SM=\sqrt{a^2+3a^2}/2=a$,
$BC=\sqrt{a^2+a^2-2a^2cosBSC}$. Bài này thường thiếu dữ kiện góc BSC để ra số cụ thể.

Bài 10

Ta có $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-AB^2)=\frac{1}{2}(a^2\cdot\frac{1}{2}+a^2\cdot\frac{1}{2}-a^2)=0\Rightarrow IK\perp AB$.

Tương tự $\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(AD^2-AC^2-\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC})$.

Vì $AD=AC$ và $BAD=BAC$ nên các tích vô hướng triệt tiêu, suy ra $IK\perp CD$.