

---

**PHẦN 1** → **ĐẠI SỐ**

---

Nguyễn Quốc Tùng

**Bài 1** ↓ **RÚT GỌN CĂN THỨC**

**I/ Rút gọn căn thức dạng  $\sqrt{x+y}$**

Để loại bỏ căn bậc hai và thực hiện rút gọn trong biểu thức ta dùng hằng đẳng thức  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  hoặc  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ví dụ 1: Rút gọn căn thức  $A = \sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$

Để rút gọn ta biến đổi biểu thức trong căn về dạng  $(a+b)^2$  hoặc  $(a-b)^2$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{14+2.3.\sqrt{5}} + \sqrt{14-2.3.\sqrt{5}} = \sqrt{9+2.3.\sqrt{5}+5} + \sqrt{9-2.3.\sqrt{5}+5} \\ &= \sqrt{3^2+2.3.\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} + \sqrt{3^2-2.3.\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(3+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} \\ &= 3+\sqrt{5} + 3-\sqrt{5} = 6 \end{aligned}$$

✍ Bài tập :

Rút gọn các biểu thức sau

1/  $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

📖 Giải

$$A = \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} + \sqrt{3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}+1 + \sqrt{3}-1 = 2\sqrt{3}$$

2/  $B = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

📖 Giải

$$B = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3/  $C = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$       👉 ĐS :  $-2\sqrt{3}$

4/  $D = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$       👉 ĐS :  $2+\sqrt{5}$

5/  $E = \sqrt{12-6\sqrt{3}} + \sqrt{21-12\sqrt{3}}$       👉 ĐS :  $\sqrt{3}$

Ví dụ 2: Rút gọn căn thức

$$A = \sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}$$

Ta biến đổi biểu thức trong căn về dạng  $a^2 + 2ab + b^2$  tuy nhiên trong căn chưa có số hạng  $2ab$  nên ta nhân thêm  $\sqrt{2}$  vào cả tử và mẫu của căn thức.

📖 Giải

$$A = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7+2.\sqrt{7}.\sqrt{3}+3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7-2.\sqrt{7}.\sqrt{3}+3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{14}$$

✍ Bài tập : Rút gọn các biểu thức sau

1/  $A = (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$

📖 Giải

$$A = (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} = (4+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{5-2\sqrt{15}+3}$$

$$= (4+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = (4+\sqrt{15})(8-2\sqrt{15}) = 2(4^2 - \sqrt{15}^2) = 2$$

2/  $B = \sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

 Giải

$$B = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$3/ A = (\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})\sqrt{2} + \sqrt{20} \quad \text{ĐS: } 3 + \sqrt{5}$$

$$4/ A = \sqrt{2}(\sqrt{21} + 3)\sqrt{5 - \sqrt{21}} \quad \text{ĐS: } 4\sqrt{3}$$

II/ Rút gọn biểu thức có chứa căn dưới mẫu

Vd : Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{6}{\sqrt{7} + 2} + \sqrt{\frac{2}{8 + 3\sqrt{7}}}$$

Để bỏ căn dưới mẫu ta nhân cả tử và mẫu cho lượng liên hiệp của mẫu

$\sqrt{7} + 2$  có lượng liên hiệp là  $\sqrt{7} - 2$

$8 + 3\sqrt{7}$  có lượng liên hiệp là  $8 - 3\sqrt{7}$

(áp dụng hằng đẳng thức  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  )

 Giải

$$A = \frac{6(\sqrt{7} - 2)}{(\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)} + \sqrt{\frac{2(8 - 3\sqrt{7})}{(8 + 3\sqrt{7})(8 - 3\sqrt{7})}} = \frac{6(\sqrt{7} - 2)}{7 - 4} + \sqrt{\frac{2(8 - 3\sqrt{7})}{64 - 63}}$$

$$= 2(\sqrt{7} - 2) + \sqrt{16 - 6\sqrt{7}} = 2(\sqrt{7} - 2) + \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} = 2\sqrt{7} - 4 + 3 - \sqrt{7} = \sqrt{7} - 1$$

✍ Bài tập : Rút gọn các biểu thức sau

$$B = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} - \frac{2 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \quad \text{ĐS: } -1$$

**BÀI**  
**2**

**RÚT GỌN BIỂU THỨC**

Vd1: cho biểu thức  $P = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

a/ Tìm điều kiện xác định của P

b/ Rút gọn biểu thức P

c/ Tính giá trị của P , biết  $x = \sqrt{2} - 1$ ;  $y = \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$

 Giải

a/ Để xác định điều kiện của biểu thức ta chú ý đến biểu thức trong căn

$A \geq 0$  và mẫu số  $\neq 0$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \cdot y > 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq y \end{cases}$$

b/  $P = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$

c/ Thay  $x = \sqrt{2} - 1$ ;  $y = \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$  ta có

$$\sqrt{2} - 1 - \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{(2\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} + 1 = -\sqrt{2}$$

✍ Bài tập : Rút gọn các biểu thức sau

1/ Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{x - \sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + 1}$

a/ Tìm điều kiện xác định của A

b/ Rút gọn biểu thức A

c/ Tìm x sao cho  $A < 0$

 Giải

a/ Điều kiện  $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 1 \neq 0 \\ x + \sqrt{x} \neq 0 \\ x\sqrt{x} + 1 \neq 0 \\ x - \sqrt{x} + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

b/  $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{x\sqrt{x} + 1}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x^3} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$

c/ Tìm x sao cho  $A < 0$

$$A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} < 0 \text{ vì } x > 0 \text{ nên ta có : } \sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow x < 1$$

Vậy  $0 < x < 1$

2/ Cho biểu thức  $B = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$

a/ Tìm điều kiện xác định của B

b/ Rút gọn biểu thức B

c/ Tìm các giá trị nguyên của x để B nhận các giá trị nguyên

ĐS:

a/  $x \geq 0$  ;  $x \neq 4$ ;  $x \neq 9$ .

b/  $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

c/  $B = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$  các giá trị nguyên của x là  $x = 1; 16; 25; 49$ .

3/ Cho biểu thức

$$C = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$$

a/ Tìm điều kiện xác định của C

b/ Rút gọn biểu thức C

c/ Tìm x để  $C < 1$

d/ Tìm x để C nhận giá trị nhỏ nhất

ĐS:

a/ đk  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

b/  $C = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

c/ Tìm giá trị của x để  $C < 1$

$x \geq 0$  và  $x \neq 1$

d/ Giá trị nhỏ nhất  $C = -1$  khi  $x = 0$

**Bài 3**

**LUYỆN TẬP**

1/ Tính

a/  $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - 2\sqrt{5}$  ĐS:  $1-\sqrt{5}$

b/  $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$

📖 Giải

$A = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$

Đặt  $B = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$

$B^2 = 4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} - 2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})} = 8 - 2\sqrt{16-7} = 8 - 6 = 2$

$B = \sqrt{2}$

$A = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

2/ Rút gọn biểu thức

a/  $A = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$

ĐS: 3

b/  $B = \sqrt{13-\sqrt{160}} + \sqrt{53+4\sqrt{90}}$

ĐS:  $4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

3/ Cho  $P(x) = \frac{\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}}{2(x-2)}$

a/ Rút gọn biểu thức  $P(x)$  ĐS:  $P(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$  (đk:  $x > 2$ )

b/ Tìm  $x$  để  $P(x) = \frac{1}{3}$  ĐS:  $x = 11$

4/ Thu gọn các biểu thức sau

a/  $A = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6-3\sqrt{3}}$  ĐS : 6

b/  $B = \left( \frac{\sqrt{x}+1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}-1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}+2x-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$  ( $x > 0 ; x \neq 4$ )

ĐS :  $B = 6$

5/ Cho biểu thức  $P = \left( 1 - \frac{x}{x-\sqrt{x}+1} \right) : \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}$  với  $x \geq 0$

a/ Rút gọn biểu thức  $P$

b/ Tìm  $x$  để  $P < 0$

📖 Giải

a/  $P = \left( \frac{x-\sqrt{x}+1-x}{x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1} = \left( \frac{1-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left( \frac{x\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1} \right)$   
 $= \left( \frac{1-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left( \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2} \right) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

b/ Tìm  $x$  để  $P < 0$

$P < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < 0$

Vì  $x \geq 0 \Rightarrow 1-\sqrt{x} < 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 1 \Rightarrow x > 1$

Vậy khi  $x > 1$  thì  $P < 0$

6/ Rút gọn biểu thức

$A = \left( \frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1}$  với  $x > 0 ; x \neq 1$ .

ĐS :  $A = -\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

7/ Rút gọn biểu thức

$A = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 4$       ĐS : 1

8/

a/ Rút gọn biểu thức

$M = \left( \frac{1}{1-\sqrt{a}} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$  với  $a \neq 1$ ;  $a > 0$       ĐS :  $M = \frac{-2}{1+\sqrt{a}}$

b/ Tính giá trị của M khi  $a = \frac{1}{9}$       ĐS :  $M = -\frac{3}{2}$

9/ Cho biểu thức

$A = \left( \frac{6x+1}{x^2-6x} + \frac{6x-1}{x^2+6x} \right) \cdot \frac{x^2-36}{12x^2+12}$  (với  $x \neq 0$ ;  $x \neq -6$ ;  $x \neq 6$ )

a/ Rút gọn biểu thức A      ĐS:  $A = \frac{1}{x}$

b/ Tính giá trị của biểu thức A với  $x = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$       ĐS:  $\sqrt{5}-2$

10/ Cho biểu thức  $A = 1 : \left( \frac{x+2}{x\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right)$

a/ Với điều kiện nào của x thì A xác định      ĐS: đk  $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

b/ Rút gọn biểu thức A      ĐS :  $A = \frac{x-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

c/ Chứng minh  $A > 1$  với mọi  $x > 0$  và  $x \neq 1$

📖 Giải

$A > 1 \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x+1} > \sqrt{x} \Leftrightarrow x-2\sqrt{x+1} > 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 > 0 \forall x > 0 ; x \neq 1.$

11/ Rút gọn biểu thức

$M = \sqrt{x+2\sqrt{3x-9}} + \sqrt{x-2\sqrt{3x-9}}$

ĐS : đk  $x \geq 3$

$3 \leq x < 6$  thì  $M = \sqrt{12}$

$x \geq 6$  thì  $M = \sqrt{4x-12}$

12/ Cho  $P(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} + \sqrt{2x^2+x^4+1}$

a/ Rút gọn P(x)      ĐS:  $P(x) = (x^2+1) \left( \frac{x}{|x|} + 1 \right)$

b/ Tính P(x) khi  $x = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$       ĐS : 4

13/ Trục căn số ở mẫu

a/  $\frac{1}{5-2\sqrt{3}}$  ĐS:  $\frac{5+2\sqrt{3}}{13}$

b/  $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$  ĐS:  $2(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

c/  $\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$  ĐS:  $\frac{-2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-4}$

14/ Tính

a/  $A = \sqrt{0,1} + \sqrt{0,9} + \sqrt{6,4} + \sqrt{0,4} + \sqrt{44,1}$  ĐS:  $35\sqrt{0,1}$

b/  $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$  ĐS:  $-\frac{17}{3}\sqrt{3}$

15/ Rút gọn biểu thức

a/  $A = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$  ĐS : 1

b/  $B = 4 \cdot \frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}-\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{8}{2+\sqrt{3}}}$  ĐS: 0

16/ Cho biểu thức

$$B = \left( \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)$$

a/ Rút gọn B ĐS : đk  $x > 0; x \neq 1$  ;  $B = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$

b/ Tìm các giá trị của x để B > 0 ĐS :  $0 < x < 1$

c/ Tìm các giá trị của x để B = -2 ĐS :  $x = (1+\sqrt{2})^2$

17/ Cho  $A = \left( \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$

a/ Rút gọn A ĐS :  $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

b/ Tìm x nguyên để A nhận giá trị nguyên

ĐS :  $x=4; x=9$  thì A nguyên

18/ Rút gọn các biểu thức sau

a/  $A = \sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{2}$  ĐS:  $\sqrt{5}$

b/  $B = (a-1)\sqrt{\frac{a}{a^2-2a+1}}$  ( $a > 1$ ) ĐS :  $B = \sqrt{a}$

19/

a/ so sánh  $\sqrt{25-9}$  và  $\sqrt{25}-\sqrt{9}$

b/ Tính giá trị của biểu thức

$A = \frac{1}{2+\sqrt{5}} + \frac{1}{2-\sqrt{5}}$  ĐS : -4

20/ Thu gọn các biểu thức sau

$$A = \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}} \quad \text{ĐS : 5}$$

$$B = \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left( \frac{x + xy}{1 - xy} \right) \quad \text{ĐS : } \frac{2}{\sqrt{x}}$$

**Bài 4**

**GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CĂN THỨC**

Vd1: giải các phương trình sau

a/  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$  (với  $x \geq 2$ )

b/  $\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+11+6\sqrt{x+2}} = 9$

 **Giải**

a/  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2(1)$  (với  $x \geq 2$ )

với điều kiện đề bài cho  $x \geq 2$ , thỏa điều kiện có nghĩa của biểu thức nên ta biến đổi để bỏ dấu căn

$$(1) \Rightarrow \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x = 2$$

Thay vào phương trình (1) ta có  $\sqrt{4} = 2$  (đúng)

Vậy nghiệm của phương trình  $x = 2$

b/  $\sqrt{x+6} + 4\sqrt{x+2} + \sqrt{x+11} + 6\sqrt{x+2} = 9$  (1)

điều kiện :  $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$$(1) \Rightarrow \sqrt{x+2} + 4\sqrt{x+2} + 4 + \sqrt{x+2} + 6\sqrt{x+2} + 9 = 9$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x+2} + 2| + |\sqrt{x+2} + 3| = 9 \Rightarrow 2\sqrt{x+2} = 4 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow x = 2$$

Thay  $x = 2$  vào phương trình (1) ta có :  $\sqrt{16} + \sqrt{25} = 9$  (đúng)

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 2$ .

Vd2: giải các phương trình sau

a/  $\sqrt{x+1} = x-1$

b/  $\sqrt{3x-1} - \sqrt{x+4} = 1$

c/  $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$

 Giải

a/  $\sqrt{x+1} = x-1$  (1)

điều kiện :  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$

$$(1) \Rightarrow x+1 = (x-1)^2 \Rightarrow x+1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

So với điều kiện ta chọn  $x=3$ , thay  $x=3$  vào phương trình (1) ta có  $\sqrt{4} = 2$  (đúng).

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 3$ .

b/  $\sqrt{3x-1} - \sqrt{x+4} = 1$  (1)

điều kiện  $\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$

(1)  $\Rightarrow \sqrt{3x-1} = 1 + \sqrt{x+4}$  vì cả hai vế phương trình đều  $\geq 0$  nên ta bình phương 2 vế ta có:

$$3x-1 = 1 + x + 4 + 2\sqrt{x+4} \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = 2x - 6 \Rightarrow \sqrt{x+4} = x - 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x+4 = x^2 + 9 - 6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là :  $x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$

c/  $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$  (1)

$$\text{điều kiện } \begin{cases} 4 - 6x - x^2 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6 + \sqrt{52}}{-2} \leq x \leq \frac{6 - \sqrt{52}}{-2} \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 4 - 6x - x^2 = x^2 + 16 + 8x \Rightarrow 2x^2 + 14x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

So với điều kiện ta chọn  $x = -1$ , thay  $x = -1$  vào phương trình (1) ta có  $\sqrt{9} = 3$  (đúng).

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -1$ .

✎ Bài tập : Giải các phương trình sau

$$1/ \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$$

$$\text{ĐS : } \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$2/ \sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}$$

$$\text{ĐS : } x = 15$$

$$3/ \sqrt{x + 6 - 4\sqrt{x + 2}} + \sqrt{x + 11 - 6\sqrt{x + 2}} = 1$$

$$\text{ĐS : } 2 \leq x \leq 7$$

$$4/ \sqrt{x^2 + 3x - 4} = \sqrt{2(x + 1)}$$

ĐS : điều kiện  $x \geq 1$ , nghiệm của phương trình là  $x = 2$

$$5/ \sqrt{2x + 5} + \sqrt{x - 1} = 8$$

$$\text{ĐS : } x = 10$$

$$6/ \sqrt{5x + 7} = \sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x + 4}$$

$$\text{ĐS : } x = \frac{-4}{3}$$

7/ Giải phương trình

$$a/ (x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6 \quad (1)$$

📖 Giải

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x^2 + 5x + 2} \quad \text{đk: } u \geq 0$$

$$\Rightarrow u^2 = x^2 + 5x + 2 \Rightarrow x^2 + 5x = u^2 - 2$$

$$(1) \Rightarrow x^2 + 5x + 4 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6 \Rightarrow u^2 - 2 + 4 - 3u = 6$$

$$\Rightarrow u^2 - 3u - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = -1 \text{ (loại)} \\ u = 4 \end{cases}$$

$$u = 4 \Rightarrow 4 = \sqrt{x^2 + 5x + 2} \Rightarrow 16 = x^2 + 5x + 2 \Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

Thay  $x = 2$  vào phương trình (1) ta có :  $18 - 3\sqrt{16} = 6$

$\Rightarrow 6 = 6$  (đúng)

Thay  $x = -7$  vào phương trình (1) ta có :  $18 - 3\sqrt{16} = 6$

$\Rightarrow 6 = 6$  (đúng)

Vậy nghiệm của phương trình là :  $x_1 = 2$  ;  $x_2 = -7$

$$b/ 3x^2 + 3x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1$$

$$\text{ĐS : } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

8/ Giải phương trình

a/  $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$       ĐS :  $x = \pm 2\sqrt{2}$

b/  $2(1-x)\sqrt{x^2 + 2x - 1} = x^2 - 2x - 1$       ĐS:  $x = -1 \pm \sqrt{6}$

**Bài 5**

**PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

I/ Giải phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$

- Tính  $\Delta = b^2 - 4ac$
- Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm

Ví dụ : giải phương trình  $3x^2 + 5x - 1 = 0$

 Giải

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 12 = 37$$

Vì  $\Delta > 0$  nên phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$= \frac{-5 + \sqrt{37}}{6}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{37}}{6}$$

 Bài tập: giải các phương trình sau

a/  $2x^2 - 7x + 3 = 0$       ĐS:  $x_1 = 3; x_2 = 0,5$

b/  $6x^2 + x + 5 = 0$       ĐS: vô nghiệm

c/  $6x^2 + x - 5 = 0$       ĐS:  $x_1 = -1; x_2 = \frac{5}{6}$

d/  $3x^2 + 5x + 2 = 0$       ĐS:  $x_1 = -1; x_2 = -\frac{2}{3}$

e/  $y^2 - 8y + 16 = 0$       ĐS:  $y_1 = y_2 = 4$

f/  $16z^2 + 24z + 9 = 0$       ĐS:  $z_1 = z_2 = -\frac{3}{4}$

\* Các trường hợp đặc biệt của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$

- Nếu  $a+b+c = 0$  thì  $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$

- Nếu  $a-b+c = 0$  thì  $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$

Ví dụ :

a/ Giải phương trình  $2x^2 + 3x - 5 = 0$

vì  $a+b+c = 2+3-5 = 0$  nên  $x_1 = 1; x_2 = -\frac{5}{2}$

b/ Giải phương trình  $11x^2 - 10x - 21 = 0$

vì  $a-b+c = 11+10-21 = 0$  nên  $x_1 = -1; x_2 = \frac{21}{11}$

II/ Định lý Vi-ét và ứng dụng

1/ Định lý Vi-ét

Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi đó

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

2/ Ứng dụng

Ví dụ 1: tìm m để phương trình  $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và biểu thức  $x_1^2 + x_2^2$  đạt giá trị nhỏ nhất

 Giải :

$$\Delta' = b'^2 - ac = m^2 - 2m + 3 = m^2 - 2m + 1 + 2 = (m-1)^2 + 2 > 0 \quad \forall m$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2 \forall m$

Ta có :  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$       (1)

Theo định lý vi-ét  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 3$

Thay vào (1) ta có :  $(2m)^2 - 2(2m-3) = 4m^2 - 4m + 6 = (2m-1)^2 + 5 \geq 5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $x_1^2 + x_2^2$  là 5, dấu “=” xảy ra khi  $2m-1 = 0 \Rightarrow$

$$m = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 2: tìm m để phương trình  $x^2 + 4x + m = 0$  có hai nghiệm trái dấu

📖 Giải :

$$\Delta' = b'^2 - ac = 4 - m$$

Để phương trình có hai nghiệm trái dấu thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0$$

Vậy khi  $m < 0$  thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình  $x^2 - 2x + m = 0$  có hai nghiệm phân biệt và cùng dương

📖 Giải :

$$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - m$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt và cùng dương thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 2 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 1$$

Vậy khi  $0 < m < 1$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt và cùng dương

✍️ Bài tập:

1/ Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$

a/ Tìm m để phương trình có nghiệm

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x_1 x_2 - x_1 - x_2$

ĐS : a/  $m \geq 1$ ; b/ Giá trị nhỏ nhất của A là  $-\frac{5}{4}$  khi  $m = \frac{3}{2}$

2/ Cho phương trình  $x^2 - 2mx - 1 = 0$ , tìm m để  $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$

ĐS :  $m = \pm 1$ .

3/ Tìm m để phương trình  $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu, cùng dấu

ĐS : để phương trình có hai nghiệm trái dấu  $m < \frac{1}{2}$

Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu  $m > \frac{1}{2}$

4/ Tìm m để phương trình  $x^2 - 3x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 1 < x_2$

ĐS:  $m < 3$

5/ Tìm m để phương trình  $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt và cùng dương. ĐS:  $m > 1$

6/ Tìm m để phương trình  $x^2 - 2x + m - 8 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $3x_1 - x_2 = 0$

ĐS :  $m = \frac{35}{4}$

7/ Tìm m để phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m-3=0$  có hai nghiệm khác dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối

ĐS :  $m=1$ .

**Bài 6**

**LUYỆN TẬP**

Bài 1: Tìm m để hai phương trình sau tương đương

a/  $x^2 + mx - 2 = 0$  và  $x^2 - 2x + m = 0$  ĐS :  $m = -2$

b/  $x^2 + mx + 1 = 0$  và  $x^2 + x + m = 0$

c/  $x^2 + 2x + m = 0$  và  $x^2 + mx + 2 = 0$

Bài 2 : Tìm m để phương trình  $x^4 - 3x^2 + m - 1 = 0$  có bốn nghiệm phân biệt.

ĐS :  $1 < m < \frac{13}{4}$

Bài 3: Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$  với m là tham số và x là ẩn số .

a) Giải phương trình với  $m=1$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$

- c) Với điều kiện câu (b) hãy tìm m để biểu thức  $A = x_1x_2 - x_1 - x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 4 : Cho phương trình :  $x^2 + 2mx + m - 1 = 0$  .

- a) Giải phương trình khi  $m = 2$ .  
b) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Hãy xác định m để phương trình có nghiệm dương.

Bài 5: Giải Phương trình và hệ phương trình sau:

a/  $3x^2 - 4x = 0$

b/  $5x^2 - 12x + 7 = 0$

c/  $3x^2 + 5x + 2 = 0$

d/  $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

Bài 6:

a) Rút gọn biểu thức:  $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$  .

b) Rút gọn biểu thức:  $P = \left( \frac{\sqrt{x}}{x - 3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x} - 3} \right) (x - 3\sqrt{x})$  (với  $x > 0; x \neq 9$ )

Bài 7: Cho phương trình bậc hai :  $x^2 - 4x + 2(m - 1) = 0$  (1) với m là tham số.

- a/ Giải phương trình (1) với  $m = -2$ .  
b/ Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 8

- a) Rút gọn biểu thức :

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

b) Rút gọn biểu thức:  $\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} + 2) - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

**Bài 7**

## GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH HOẶC HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì sau 4 giờ 48 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được  $\frac{3}{4}$  bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể?

📖 Giải

4 giờ 48 phút =  $\frac{24}{5}$  giờ

Gọi x là thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể ( $x > 0$ )

Gọi y là thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể ( $y > 0$ )

Một giờ vòi thứ nhất chảy :  $\frac{1}{x}$  bể

Một giờ vòi thứ hai chảy :  $\frac{1}{y}$  bể

Một giờ cả hai vòi cùng chảy được  $\frac{5}{24}$  bể

Theo đề bài ta có phương trình :  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$  (1)

3 giờ vòi thứ nhất chảy được :  $\frac{3}{x}$  bể

4 giờ vòi thứ hai chảy :  $\frac{4}{y}$  bể

Cả hai vòi chảy được  $\frac{3}{4}$  bể nước nên ta có phương trình:

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Giải ra ta được :  $x=12$  ;  $y=8$

Vậy : vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 12 giờ, vòi thứ hai chảy đầy bể trong 8 giờ.

Ví dụ 2: Quãng đường AB dài 90km, có hai ô tô khởi hành cùng một lúc. Ô tô thứ nhất đi từ A đến B , ô tô thứ hai đi từ B đến A. Sau một giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

 Giải

27 phút =  $\frac{9}{20}$  giờ

Gọi x là vận tốc ô tô thứ nhất ( $x > 0$ )

Gọi y là vận tốc ô tô thứ hai ( $y > 0$ )

Quãng đường ô tô thứ nhất đi sau 1 giờ là : x

Quãng đường ô tô thứ hai đi sau 1 giờ là : y

Hai ô tô gặp nhau sau 1 giờ nên ta có phương trình :  $x+y = 90$  (1)

Thời gian đi của ô tô thứ nhất là :  $\frac{90}{x}$

Thời gian đi của ô tô thứ hai là :  $\frac{90}{y}$

Xe thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút nên ta có phương trình :

$$\frac{90}{x} - \frac{90}{y} = \frac{9}{20} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ \frac{90}{x} - \frac{90}{y} = \frac{9}{20} \end{cases}$$

giải ra ta được :  $x= 40$ ;  $y=50$

Vậy : vận tốc ô tô thứ nhất 40km/h; vận tốc ô tô thứ hai 50km/h.

✍ Bài tập:

Bài 1: Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể thì 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi thứ hai cần nhiều hơn vòi thứ nhất là 5 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

ĐS: vòi thứ nhất chảy riêng trong 10 giờ; vòi thứ hai chảy riêng trong 15 giờ.

Bài 2: Một đội xe cần chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc đội được bổ xung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn một tấn so với dự định. Hỏi đội xe lúc đầu có bao nhiêu chiếc? Biết rằng số hàng chở trên tất cả các xe có trọng lượng như nhau.

ĐS :Lúc đầu có 9 xe.

Bài 3: Hai người cùng làm một công việc trong 16h thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì xong 25% công việc. Hỏi mỗi người làm riêng công việc đó thì bao lâu mới xong.

ĐS: Người thứ nhất làm xong công việc trong 24 giờ

Người thứ hai làm xong công việc trong 48 giờ

Bài 4: Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể cạn sau 1h30phút thì đầy. Nếu mở vòi 1 trong 15phút rồi khóa lại và mở vòi 2 trong 20phút thì được  $\frac{1}{5}$  bể. Hỏi nếu chảy riêng mỗi vòi thì sau bao lâu đầy bể?

ĐS: Vòi 1 chảy đầy bể trong  $\frac{15}{4}$ giờ; Vòi 2 chảy đầy bể trong  $\frac{5}{2}$  giờ.

Bài 5: Một công nhân phải làm 420 sản phẩm. Do mỗi ngày người đó làm tăng được 5 sản phẩm nên đã hoàn thành công việc sớm hơn 7 ngày. Tính số ngày người đó đã làm.

ĐS: số ngày người đó đã làm : 21 ngày

Bài 6: Hai máy cày cùng làm việc trong 5 giờ thì cày xong  $\frac{1}{18}$  cánh đồng. Nếu máy thứ nhất làm việc trong 6 giờ và máy thứ hai làm việc trong 10 giờ thì hai máy cày được 10% cánh đồng. Hỏi mỗi máy làm việc riêng thì cày xong cánh đồng trong bao nhiêu giờ?

ĐS: Máy cày 1 làm xong trong 360 giờ; máy cày 2 làm xong trong 120 giờ.

Bài 7: Một ô tô đi từ A đến C qua B. Biết quãng đường AC dài 270km. Xe đi từ A đến B với vận tốc 60km/h, đi từ B đến C với vận tốc 40km/h. Tính thời gian ô tô đi từ A đến B, từ B đến C. Biết thời gian ô tô đi từ A đến C là 6 giờ.

ĐS: thời gian đi từ A đến B : 1,5 giờ; Thời gian đi từ B đến C : 4,5 giờ.

Bài 8: Một người đi xe đạp từ A đến B cách 120km. Khi đi được nửa đường thì nhận thấy từ lúc khởi hành vận tốc kém vận tốc dự kiến 3km/h. Anh đạp nhanh hơn với vận tốc dự kiến 5km/h và đến B đúng thời gian quy định. Tính :

a) Vận tốc dự kiến

b) Thời gian đi hết nửa quãng đường đầu tiên.

ĐS : vận tốc dự kiến 15km/h; thời gian đi hết nửa quãng đường đầu: 5 giờ.

Bài 9: Một xe máy khởi hành từ A lúc 6 giờ 15 phút với vận tốc 50km/h đến B nghỉ 1 giờ 30 phút rồi trở về A với vận tốc 40km/h. Đến A lúc 14 giờ 30 phút. Tính quãng đường AB.

ĐS : Quãng đường AB dài 150km.

Bài 10: Một người đi bộ từ A đến B với vận tốc 4km/h rồi đi ô tô từ B đến C với vận tốc 40km/h. Lúc về người đó đi xe đạp cả quãng đường CA với vận tốc 16km/h. Biết quãng đường AB ngắn hơn quãng đường BC 24km và thời gian lúc về bằng thời gian đi. Tính quãng đường AC.

ĐS: quãng đường AC dài 36km.

Bài 11: Một ca nô xuôi một khúc sông dài 50km rồi ngược lại 32km thì hết 4 giờ 30 phút. Tính vận tốc dòng nước biết vận tốc canô khi nước đứng yên là 18km/h.

ĐS: vận tốc dòng nước : 2km/h

Bài 12: Một chiếc thuyền khởi hành tại bến A. Sau 5 giờ 20 phút một canô xuất phát từ A đuổi theo và gặp thuyền tại vị trí cách A 20km. Biết trong 1 giờ canô đi nhanh hơn thuyền 12km. Tính vận tốc của thuyền.

ĐS: vận tốc của thuyền là 3km/h.

Bài 13: Một người đi xe gắn máy đi từ A đến B cách 90km. Vì cần phải đến B trước giờ dự định 45 phút nên phải tăng vận tốc mỗi giờ thêm 10km. Tính vận tốc dự định.

ĐS: vận tốc dự định: 30km/h

Bài 14 : Một canô xuôi khúc sông 90km rồi ngược lại 36km. Biết thời gian xuôi nhiều hơn thời gian ngược 2 giờ và vận tốc khi xuôi lớn hơn vận tốc khi ngược 6km/h. Tính vận tốc xuôi dòng và ngược dòng.

ĐS : vận tốc xuôi dòng 18km/h; vận tốc ngược dòng 12km/h.

Vận tốc xuôi dòng 15km/h; vận tốc ngược dòng 9km/h.

Bài 15: Quãng đường sông từ bến sông A đến bến sông B dài 48km. Một canô xuôi dòng từ A đến B rồi ngược về A. Thời gian về hơn thời gian xuôi là 30 phút. Vận tốc canô nếu nước không chảy là 28km/h. Tìm vận tốc dòng nước.

ĐS: vận tốc dòng nước : 4km/h.

Bài 16 : Trong một cuộc đua, ba tay đua cùng khởi hành một lúc. Mỗi giờ người thứ hai chậm hơn người thứ nhất 15km và nhanh hơn người thứ ba 3 km. Người thứ hai đến đích chậm hơn người thứ nhất 12 phút và sớm hơn người thứ ba 3 phút. Tính thời gian chạy hết quãng đường của ba tay đua.

ĐS : Thời gian người thứ nhất : 1 giờ

Thời gian người thứ hai : 1,2 giờ

Thời gian người thứ ba: 1,25 giờ

Bài 17 : Hai đội xây dựng nếu làm chung thì mất 6 ngày để hoàn thành công việc. Nếu làm riêng thì đội I làm lâu hơn đội II 5 ngày. Hỏi mỗi đội khi làm riêng thì mất bao nhiêu ngày?

ĐS: đội I làm riêng mất 15 ngày; đội II làm riêng mất 10 ngày.

Bài 18: Hai công nhân được giao làm cùng một loại sản phẩm có số lượng và thời gian như nhau. Người thứ nhất mỗi giờ làm tăng một sản phẩm nên hoàn thành công việc trước thời hạn 2 giờ. Người thứ hai mỗi giờ làm tăng thêm 2 sản phẩm nên vừa hoàn thành công việc trước 3 giờ vừa vượt mức 7 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi người được giao.

ĐS: số sản phẩm mỗi người được giao : 180 sản phẩm.



**Bài 8**

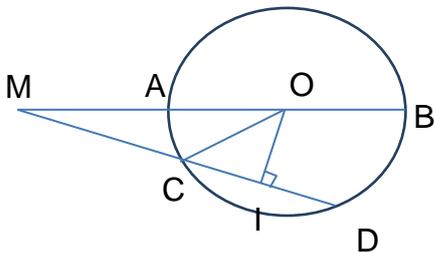
**CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC**

Bài 1: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O;R), kẻ đường thẳng qua O cắt đường tròn tại hai điểm A và B (A nằm giữa M và O).

a) Chứng minh rằng :  $MA.MB = MO^2 - R^2$

b) Kẻ cát tuyến thứ hai MCD với đường tròn ( C nằm giữa M và D). Chứng minh :  $MC.MD = MA.MB$

Giải :



a) Ta có :  $MA.MB = (MO - OA).(MO+OB) = (MO - R).(MO+R)$

$$= MO^2 - R^2$$

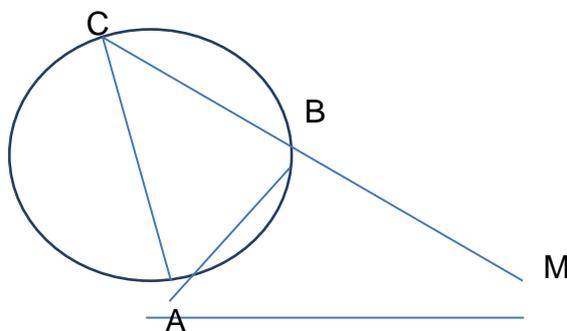
b) Ta có :  $MC.MD = (MI-IC).(MI+ID) = MI^2 - IC^2$

$$= MO^2 - OI^2 - (OC^2 - OI^2) = MO^2 - OC^2 = MO^2 - R^2.$$

Mà  $MA.MB = MO^2 - R^2$  ( chứng minh trên)  $\Rightarrow MA.MB = MC.MD$ .

Bài 2: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC đến đường tròn. Chứng minh rằng :  $MA^2 = MB.MC$ .

Giải :



Xét  $\triangle MAB$  và  $\triangle MCA$  ta có :  $\widehat{BAM} = \widehat{MCA}$  (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

*M̂ chung*

$$\Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MCA (g-g)$$

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$$

Bài 3: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai cát tuyến MAB và MCD.

Chứng minh rằng :  $MA.MB = MC.MD$ .

Bài 4: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A,B là các tiếp điểm), vẽ các tuyến MCD (không qua tâm O,C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của dây CD, tia OI cắt đường thẳng AB tại E. Gọi H là giao điểm của MO và AB. Chứng minh :  $OH.OM = OI.OE$ .

Bài 5: Chứng minh rằng : “Trong một tứ giác nội tiếp, tích hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện”.

Bài 6: Cho đường tròn (O;R) và dây cung AB với  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ . Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn cắt nhau ở C. Trên các đoạn thẳng BC, CA và AB lần lượt lấy các điểm I, J và K sao cho K không trùng với A và B và  $\widehat{IKJ} = 60^\circ$ . Chứng minh

$$: AJ.BI \leq \frac{AB^2}{4}$$

Bài 7 : Trong các tứ giác nội tiếp đường tròn (O;R) cho trước. Tìm tứ giác có  $AB.DC + AD.BC$  lớn nhất.

Bài 8 : Cho đường thẳng  $(d)$  và đường tròn  $(O;R)$  có khoảng cách từ tâm  $O$  đến  $(d)$  là  $OH > R$ . Lấy hai điểm bất kỳ  $A$  trên  $(d)$  và  $B$  trên  $(O;R)$ . Hãy chỉ ra vị trí của  $A$  và  $B$  sao cho độ dài  $AB$  ngắn nhất và hãy chứng minh điều ấy.

Bài 9: Cho đường tròn  $(O;R)$  dây cung  $AB$  cố định,  $M$  là điểm di động trên dây  $AB$ , qua  $M$  vẽ cung  $CD$ . Hãy xác định vị trí điểm  $M$  để tích  $MC \cdot MD$  lớn nhất.

Bài 10: Cho tam giác  $ABC$  nhọn.  $D$  là điểm di động trên cạnh  $BC$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là hình chiếu của  $D$  lên  $AB$  và  $AC$ . Hãy xác định vị trí điểm  $D$  để độ dài đoạn thẳng  $EF$  nhỏ nhất.

**Bài 9**

**CÁC BÀI TOÁN VỀ TIẾP TUYẾN**

Bài 1: Từ điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O;R)$  vẽ đường thẳng  $(d)$  không đi qua tâm  $O$  cắt đường tròn tại hai điểm  $B$  và  $C$  ( $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ ). Các tiếp tuyến tại  $B$  và  $C$  cắt nhau ở  $D$ . Vẽ  $DH$  vuông góc với  $AO$  ( $H$  thuộc  $AO$ ),  $DH$  cắt cung nhỏ  $BC$  tại  $M$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $DO$  và  $BC$ . Chứng minh  $AM$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O;R)$ .

Bài 2: Từ điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$  vẽ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  đến đường tròn ( $A, B$  là các tiếp điểm). Vẽ đường kính  $BC$  của đường tròn  $(O)$ ,  $MC$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$ . Gọi  $I$  là trung điểm dây  $CD$ , tia  $OI$  cắt đường thẳng  $AB$  tại  $K$ . Chứng minh rằng  $KC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

Bài 3: Từ điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$  vẽ cát tuyến  $ABC$  đến đường tròn. Vẽ đường tròn đi qua 3 điểm  $B, O, C$  và  $(BOC)$  cắt đoạn  $AO$  tại  $H$ . Đường thẳng vuông góc với  $AO$  tại  $H$  cắt đường tròn  $(O)$  tại hai điểm  $D$  và  $E$ . Chứng minh rằng  $AD, AE$  là các tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

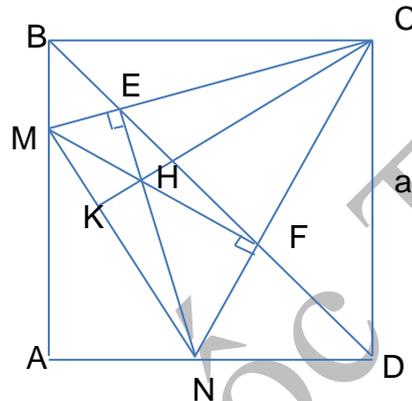
Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A ( $AB < AC$ ). Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho  $\widehat{ABM} = \widehat{C}$ . Vẽ đường tròn đường kính CM và cắt tia BM ở H. Chứng minh rằng HA là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CM.

Bài 5: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho  $\widehat{MCN} = 45^\circ$  (M, N không trùng với đỉnh hình vuông). CM, CN lần lượt cắt BD tại E và F. Gọi H là giao điểm của NE và MF.

a) Chứng minh các tứ giác BCFM và ECDN nội tiếp được.

b) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn tâm C, bán kính a.

Giải :



a) Ta có :  $\widehat{MCF} = \widehat{MBF} = 45^\circ$  (gt)  $\Rightarrow$  tứ giác BCFM nội tiếp ( hai đỉnh cùng nhìn MN dưới một góc bằng nhau)

Ta có :  $\widehat{ECN} = \widehat{EDN} = 45^\circ$  (gt)  $\Rightarrow$  tứ giác ECDN nội tiếp ( hai đỉnh cùng nhìn EN dưới một góc bằng nhau)

b) Tứ giác BCFM nội tiếp (cmt)  $\Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{MFC} = 180^\circ$  mà  $\widehat{MBC} = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \widehat{MFC} = 90^\circ \Rightarrow MF \perp NC$ , tương tự ta cũng chứng minh được  $NE \perp MC$   
 $\Rightarrow CK \perp MN$  ( CK là đường cao thứ ba)

Xét hai tam giác vuông  $\triangle MBC$  và  $\triangle MKC$ , ta chứng minh hai tam giác vuông này bằng nhau theo trường hợp góc nhọn cạnh huyền  $\Rightarrow BC = KC \Rightarrow$  vậy MN vuông góc với bán kính KC (  $KC = a$ ) tại K nên MN là tiếp tuyến với đường tròn tâm C bán kính a.

**Bài  
10**

**CÁC BÀI TOÁN VỀ  
TỨ GIÁC NỘI TIẾP**

Bài 1: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm) và cát tuyến ADE (không đi qua tâm O) đến đường tròn (O). BC cắt AO tại I. Chứng minh rằng tứ giác DIOE nội tiếp.

Bài 2: Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ đường kính BD của (O). Tiếp tuyến tại D cắt BC ở E, OE cắt AD tại N. Chứng minh 4 điểm A, O, N, C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 3: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC, EF là một dây cung đi qua H. Chứng minh tứ giác AEOF nội tiếp.

Bài 4: Cho tam giác ABC nhọn, đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB tại E và AC tại D. Gọi H là giao điểm của BD và EC. Tia AH cắt BC tại F. Chứng minh tứ giác EDOF nội tiếp.

Bài 5: Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là các tiếp điểm), vẽ  $CD \perp AB$  tại D và cắt (O) tại E, vẽ  $EF \perp BC$  tại F và  $EH \perp AC$  tại H. Gọi N là giao điểm của DF và EB, M là giao điểm của FH và EC. Chứng minh tứ giác MENF nội tiếp.

**Bài  
11**

**CÁC BÀI TOÁN VỀ CHỨNG MINH  
BA ĐIỂM THẲNG HÀNG**

Bài 1: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của BC. Tia HI cắt cung nhỏ BC tại K. Chứng minh A, O, K thẳng hàng.

Bài 2: Cho tam giác ABC ( $AB < AC$ ) có 3 góc nhọn. Đường tròn tâm O đường kính cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và D. Gọi H là giao điểm của BD và CE, K là giao điểm của AH và BC. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (O) với M, N là các tiếp điểm.

a) Chứng minh :  $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$ .

b) Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Bài 3: Từ điểm M trên cung BC của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ , kẻ các đường vuông góc MP, MQ, MR lần lượt xuống các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng P, Q, R thẳng hàng.

Bài 4: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD, CE cắt nhau tại H và lần lượt cắt đường tròn tại F và G. Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC, MG cắt AB tại I, IH cắt AC tại K. Chứng minh rằng ba điểm M, K, F thẳng hàng.

**Bài  
12**

**MỘT SỐ ĐỀ THI VÀO LỚP 10**

**ĐỀ 1**

Bài 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a)  $x^2 - 2\sqrt{5}x + 4 = 0$

b)  $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

c) 
$$\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 9x - y = 7 \end{cases}$$

Bài 2: Thu gọn các biểu thức sau :

a)  $A = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

b)  $B = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

Bài 3: Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích bằng  $675m^2$  và có chu vi bằng 120m. Tìm chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Bài 4: Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$  với  $m$  là tham số và  $x$  là ẩn số.

a) Giải phương trình với  $m = 1$ .

b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 ; x_2$ .

c) Với điều kiện câu (b) hãy tìm  $m$  để biểu thức  $A = x_1x_2 - x_1 - x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn ( $AB < AC$ ). Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F. Biết BF cắt CE tại H và AH cắt BC tại D.

a) Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp và AH vuông góc với BC.

b) Chứng minh  $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ .

- c) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và K là trung điểm của BC . Tính tỉ số  $\frac{OK}{BC}$  khi tứ giác BHOC nội tiếp .
- d) Cho HF = 3cm, HB = 4cm, CE = 8cm và HC > HE. Tính HC.

## ĐỀ 2

Bài 1: Cho biểu thức  $P = \left(1 - \frac{x}{x-\sqrt{x+1}}\right) : \frac{x+2\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$  với  $x \geq 0$ .

- Rút gọn biểu thức P.
- Tìm x để  $P < 0$ .

Bài 2: Cho phương trình :  $x^2 + 2mx + m - 1 = 0$

- Giải phương trình khi  $m=2$
- Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Hãy xác định m để phương trình có nghiệm dương.

Bài 3:

- Giải phương trình :  $3x^2 + 3x - 2\sqrt{x^2 + x} = 1$
- Cho hệ phương trình :  $\begin{cases} 2x - y = m - 2 \\ x + 2y = 3m + 4 \end{cases}$ 
  - Giải hệ phương trình khi  $m=2$
  - Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x;y) thỏa mãn :  $x^2 + y^2 = 10$ .

Bài 4: Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB , điểm I nằm giữa hai điểm A và O . Kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại I, đường thẳng này cắt đường tròn (O; R) tại M và N . Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng BM và AN . Qua S kẻ đường thẳng song song với MN , đường thẳng này cắt các đường thẳng AB và AM lần lượt ở K và H . Hãy chứng minh :

- Tứ giác SKAM là tứ giác nội tiếp và  $HS.HK = HA.HM$ .
- KM là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).
- Ba điểm H, N, B thẳng hàng.

Bài 5 : Cho  $x^2 + y^2 = 6$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức  $m = x - \sqrt{5}y$ .

ĐỀ 3

Bài 1:

- a) Giải phương trình :  $2(x-1) = 3-x$ .  
 b) Giải hệ phương trình :  $\begin{cases} y = x - 2 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$

Bài 2 :

- a) Cho hàm số  $y=f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ . Tính  $f(0)$  ;  $f(2)$  ;  $f(\frac{1}{2})$ ;  $f(-\sqrt{2})$ .  
 b) Cho phương trình ẩn  $x$  :  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ . Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1$ ;  $x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 8$

Bài 3:

- a) Rút gọn biểu thức  $A = \left( \frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x+1}}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .  
 b) Hai ô tô cùng xuất phát từ A đến B , ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai mỗi giờ 10km nên đến B sớm hơn ô tô thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc hai xe ô tô. Biết quãng đường AB dài 300km.

Bài 4: Cho đường tròn (O) dây AB không đi qua tâm O , trên cung nhỏ AB lấy điểm M ( M không trùng với A,B) kẻ dây MN vuông góc với AB tại H , kẻ  $MK \perp AN$  ( K thuộc AN).

- a) Chứng minh bốn điểm A, M, H ,K thuộc một đường tròn.  
 b) Chứng minh MN là tia phân giác của góc BMK.  
 c) Khi M di chuyển trên cung nhỏ AB . Gọi E là giao điểm của HK và BN. Xác định vị trí của điểm M để  $(MK \cdot AN + ME \cdot NB)$  có giá trị lớn nhất.

Bài 5: Cho  $x, y$  thỏa mãn  $\sqrt{x+2} - y^3 = \sqrt{y+2} - x^3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :  $B = x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y + 10$ .

## ĐỀ 4

Bài 1:

- a) Giải phương trình:  $\frac{x-1}{2} + 1 = \frac{x+1}{4}$   
 b) Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} x = 2y \\ x - y = 5 \end{cases}$

Bài 2:

- a) Rút gọn biểu thức:  $A = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ . Với  $x \geq 0$  và  $x \neq 4$ .  
 b) Một hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 2cm và diện tích của nó là  $15\text{cm}^2$ . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó.

Bài 3: Cho phương trình:  $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ .

- a) Giải phương trình với  $m=3$ .  
 b) Tính giá trị của  $m$  biết phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và thỏa mãn điều kiện:  $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = -12$ .

Bài 4: Cho tam giác MNP cân tại M có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên nội tiếp đường tròn (O;R). Tiếp tuyến tại N và P của đường tròn lần lượt cắt tia MP và tia MN tại E và D.

- a) Chứng minh:  $NE^2 = EP \cdot EM$   
 b) Chứng minh tứ giác DEPN là tứ giác nội tiếp.  
 c) Qua P kẻ đường thẳng vuông góc với NM cắt đường tròn (O) tại K (K không trùng với P). Chứng minh rằng:  $MN^2 + NK^2 = 4R^2$ .

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{6-8x}{x^2+1}$$

ĐỀ 5

Bài 1:

- Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để biểu thức  $\sqrt{2x-1}$  có nghĩa.
- Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$$
- Rút gọn :  $\frac{1}{3-\sqrt{2}} + \frac{1}{3+\sqrt{2}}$

Bài 2 : Cho hàm số  $y = -x^2$  có đồ thị (P) và  $y = 2x+m$  có đồ thị (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

- Vẽ đồ thị (P).
- Định  $m$  để (P) và (d) có điểm chung duy nhất. Vẽ (d) với  $m$  vừa tìm được.

Bài 3:

- Rút gọn biểu thức  $M = \left( \frac{1}{1-\sqrt{a}} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$  với  $a \neq 1$  và  $a > 0$ .
- Tính giá trị của  $M$  khi  $a = \frac{1}{9}$ .

Bài 4: Cho đường tròn tâm O đường kính  $AB = 2R$  và E là điểm bất kỳ trên đường tròn đó ( E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K khác A.

- Chứng minh rằng  $\Delta KAF$  và  $\Delta KEA$  đồng dạng.
- Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE. Chứng minh rằng đường tròn (I; IE) tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.
- Gọi M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I; IE). Chứng minh rằng :  $MN \parallel AB$ .
- Gọi P là giao điểm của NF và AK ; Q là giao điểm của MF và BK. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi  $\Delta KPQ$  theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O).

**ĐỀ 6**

Bài 1: Cho biểu thức :  $A = \left( \frac{6x+1}{x^2-6x} + \frac{6x-1}{x^2+6x} \right) \cdot \frac{x^2-36}{12x^2+12}$  (với  $x \neq 0$ ;  $x \neq -6$ ;  $x \neq 6$ )

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A với  $x = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$

Bài 2:

a) Giải các phương trình :

$$x - \frac{15}{x} = 2\sqrt{x+5} - 2 = 0$$

b) Cho phương trình:  $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$  có hai nghiệm  $x_1$  ;  $x_2$ . Tìm giá trị của m để  $10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3 : vẽ đồ thị hàm số  $y = -0,5x^2$ . Trên đồ thị hàm số y lấy hai điểm A và B có hoành độ lần lượt là -1 và 2. Hãy viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 4: Cho đường tròn (O) và một điểm A bên ngoài đường tròn sao cho  $OA = 3R$  . Vẽ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh tứ giác OBAC nội tiếp

b) Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại D ( khác B). Đường thẳng AD cắt (O) tại E khác D. Chứng minh :  $AB^2 = AE \cdot AD$  và  $CE^2 = EB \cdot EA$

c) Chứng minh rằng tia đối của tia EC là phân giác của góc BEA.

d) Tính diện tích tam giác BDC theo R.

Bài 5: Cho hệ phương trình :  $\begin{cases} x + y = m & (1) \\ mx + y = 1 & (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với  $m=2$

b) Xác định giá trị m để hai đường thẳng có phương trình (1), (2) cắt nhau tại một điểm trên parabol  $y = -2x^2$ .

ĐỀ 7

Bài 1: Cho biểu thức  $A = 1: \left( \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right)$ .

- Với điều kiện nào của  $x$  thì  $A$  xác định.
- Rút gọn biểu thức  $A$
- Chứng minh  $A > 1$  với mọi  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

Bài 2: Cho hàm số  $y = -3x^2$  có đồ thị (P) và đường thẳng (d) có phương trình  $y = 2x - 5$ .

- Vẽ đồ thị (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .
- Xác định tọa độ giao điểm A và B của đồ thị (P) và đường thẳng (d).
- Tìm tọa độ điểm M trên cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

Bài 3: Hai người đi xe đạp khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A và B trên cùng một đường thẳng. Người này đi tới điểm xuất phát của người kia rồi trở về điểm xuất phát của mình. Lần gặp nhau thứ nhất cách A 8km và lần gặp nhau thứ hai cách B 5km. Tính quãng đường AB, biết vận tốc của hai người không đổi trong suốt thời gian đi và về.

Bài 4: Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường thẳng (d) nằm ngoài đường tròn , kẻ OH vuông góc với (d) tại H. Biết  $OH = R\sqrt{2}$  .Trên đường thẳng (d) lấy điểm A (A không trùng với H) . Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B,C là tiếp điểm).

- Chứng minh năm điểm A, B, O, C, H cùng thuộc một đường tròn. Hãy xác định tâm I.
- Tia OC cắt đường thẳng d tại E. Chứng minh  $\triangle EHC$  và  $\triangle EAO$  đồng dạng.
- Biết  $OA = 2R$ , trên đoạn AC lấy điểm F sao cho  $\widehat{FAO} = 15^\circ$  . Tính diện tích tam giác FAI theo R.
- Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua điểm cố định K khi A di động trên đường thẳng d.

Bài 5: cho  $x, y$  thỏa mãn  $4x + y = 1$  . Chứng minh rằng :  $4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$

ĐỀ 8

Bài 1: Cho biểu thức  $A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a}$ .

- Tìm điều kiện đối a, b để biểu thức A xác định.
- Rút gọn biểu thức A.

Bài 2

- Giải hệ phương trình :  $\begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases}$
- Giải bất phương trình :  $x + |x - 1| > 5$

Bài 3: Chứng minh rằng , nếu phương trình  $x^2 + 2mx + n = 0$  có nghiệm thì phương trình  $x^2 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 0$  cũng có nghiệm ( với m, n, k là các tham số ;  $k \neq 0$  )

Bài 4: Cho hàm số  $y = ax + b$  có đồ thị (d) và hàm số  $y = kx^2$  có đồ thị (P) .

- Tìm a, b biết rằng (d) đi qua A(-1 ; 3) và B(2;0).
- Tìm  $k \neq 0$  sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (d) vừa tìm. Viết phương trình (P).

Bài 5: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi C là một điểm trên cung lớn AB của đường tròn (O). Vẽ AH vuông góc với BC ( H thuộc BC). Gọi I là trung điểm của AH , CI cắt (O) tại điểm thứ hai E . ME cắt (O) tại điểm thứ hai F , MO cắt AB tại K.

- Chứng tỏ :  $MO \perp AB$  tại K
- Chứng tỏ :  $MA^2 = ME.MF$
- Chứng tỏ :  $\widehat{AEK} = 90^\circ$
- Chứng tỏ OM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MEA.

## ĐỀ 9

Bài 1:

- a) Giải phương trình :  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 49$ .
- b) Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} (x - y)^2 + 3(x - y) = 4 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$
- c) Giải bất phương trình :  $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$

Bài 2:

- a) Tìm giá trị của x để biểu thức  $\frac{1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 5}$  có giá trị lớn nhất.
- b) Cho biểu thức  $P = \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2}$   
 Với  $|a| > |b| > 0$ . Rút gọn biểu thức P.

Bài 3: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì sau 12 giờ đầy bể. Hai vòi nước cùng chảy 8 giờ thì người ta khóa vòi I, còn vòi II tiếp tục chảy. Do tăng công suất vòi II lên gấp đôi, nên vòi II đã chảy đầy phần còn lại của bể trong 3 giờ rưỡi. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình với công suất bình thường thì phải bao lâu mới đầy bể?.

Bài 4: Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn ( $AB \neq AC$ ) nội tiếp trong đường tròn (O). H là giao điểm của các đường cao AD, BE, CF và Q là điểm đối xứng của H qua trung điểm đoạn BC.

- a) Chứng minh  $\widehat{BEF} = \widehat{BED} = \widehat{QBC}$ .
- b) Chứng minh Q nằm trên đường tròn (O).
- c) Từ A kẻ  $Ax \parallel EF$ , đường thẳng Ax cắt đường thẳng BC ở K. Chứng minh Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O) và  $AK^2 = KB \cdot KC$ .
- d) Gọi I là điểm đối xứng của O qua BC. Chứng minh rằng  $AO = HI$ .

Bài 5: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn  $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} \geq 23$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 8x + \frac{6}{x} + 18y + \frac{7}{y}$ .

## ĐỀ 10

Bài 1: Rút gọn biểu thức  $A = \frac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b} + \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$   
 ( với  $a > 0$  ,  $b > 0$ , và  $a \neq b$ ).

Bài 2: Cho phương trình :  $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

- Xác định  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt
- Xác định  $m$  để phương trình có một nghiệm bằng 2 và tính nghiệm kia.
- Xác định  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{4}$$

Bài 3:

- Tìm tọa độ giao điểm của parabol  $y = \frac{1}{3}x^2$  và đường thẳng  $y = \frac{1}{6}(x + 21)$
- Với giá trị nào của  $k$  để đường thẳng  $y = k(x-1)$  tiếp xúc với parabol  $y = \frac{1}{3}x^2$

Bài 4: Một mặt phẳng đi qua trục  $OO'$  của một hình trụ , phần mặt phẳng đó bị giới hạn bởi hình trụ là một hình chữ nhật có diện tích là  $72\text{cm}^2$ . Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ, biết rằng đường kính đáy bằng một nửa đường cao.

Bài 5: Từ một điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O)$  kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  đến  $(O)$  ( $B, C$  là các tiếp điểm). Vẽ đường kính  $BD$  của đường tròn  $(O)$  ,  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  ở  $E$ .

- Chứng minh :  $AB^2 = AE \cdot AD$
- Kẻ đường kính  $EK$  của đường tròn  $(O)$  ,  $KC$  cắt  $DE$  ở  $I$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm của  $DE$ .
- Gọi  $H$  là giao điểm của  $OA$  với  $BC$  . Chứng minh  $HC$  là tia phân giác của góc  $DHE$ .
- Gọi  $S$  là giao điểm của hai tia  $OI$  và  $BC$  . Chứng minh  $SD$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

ĐỀ 11

Bài 1 : Cho biểu thức  $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

- Rút gọn P.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P
- Tìm x để biểu thức  $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$  nhận giá trị là số nguyên.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) :  $y = -x^2$  và đường thẳng (d) đi qua điểm I(0;-1) có hệ số góc k.

- Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh với mọi giá trị của k , (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
- Gọi hoành độ của A và B là  $x_1$  và  $x_2$  , chứng minh  $|x_1 - x_2| \geq 2$
- Chứng minh tam giác OAB vuông

Bài 3: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) (  $AB < AC$ ). Đường tròn tâm  $O_1$  tiếp xúc với đường tròn (O) tại M , tiếp xúc với hai cạnh AB, AC lần lượt tại L và K. Gọi E là giao điểm thứ hai của MK với đường tròn (O).

- Chứng minh ME là tia phân giác của góc  $\widehat{AMC}$ .
- Tia phân giác Mx của góc  $\widehat{BMC}$  cắt LK tại I . Chứng minh rằng bốn điểm M, I, K, C cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh CI là tia phân giác của góc  $\widehat{BCA}$

Bài 4: Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện:  $x+y+z+xy+yz+zx = 6$   
Chứng minh rằng :  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ .