

PHẦN 1

ĐẠI SỐ

Nguyễn Quốc Tùng

Bài 1

RÚT GỌN CĂN THỨC

I/ Rút gọn căn thức dạng $\sqrt{x+y}$

Để loại bỏ căn bậc hai và thực hiện rút gọn trong biểu thức ta dùng hằng đẳng thức $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ hoặc $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ví dụ 1: Rút gọn căn thức $A = \sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$

Để rút gọn ta biến đổi biểu thức trong căn về dạng $(a+b)^2$ hoặc $(a-b)^2$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{14+2.3.\sqrt{5}} + \sqrt{14-2.3.\sqrt{5}} = \sqrt{9+2.3.\sqrt{5}+5} + \sqrt{9-2.3.\sqrt{5}+5} \\ &= \sqrt{3^2+2.3.\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} + \sqrt{3^2-2.3.\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(3+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} \\ &= 3+\sqrt{5} + 3-\sqrt{5} = 6 \end{aligned}$$

✍ Bài tập :

Rút gọn các biểu thức sau

1/ $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

📖 Giải

$$A = \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} + \sqrt{3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}+1 + \sqrt{3}-1 = 2\sqrt{3}$$

2/ $B = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

📖 Giải

$$B = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3/ $C = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ 👉 ĐS : $-2\sqrt{3}$

4/ $D = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ 👉 ĐS : $2+\sqrt{5}$

5/ $E = \sqrt{12-6\sqrt{3}} + \sqrt{21-12\sqrt{3}}$ 👉 ĐS : $\sqrt{3}$

Ví dụ 2: Rút gọn căn thức

$$A = \sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}$$

Ta biến đổi biểu thức trong căn về dạng $a^2 + 2ab + b^2$ tuy nhiên trong căn chưa có số hạng $2ab$ nên ta nhân thêm $\sqrt{2}$ vào cả tử và mẫu của căn thức.

📖 Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7+2.\sqrt{7}.\sqrt{3}+3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7-2.\sqrt{7}.\sqrt{3}+3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

✍ Bài tập : Rút gọn các biểu thức sau

1/ $A = (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$

📖 Giải

$$\begin{aligned} A &= (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} = (4+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{5-2\sqrt{15}+3} \\ &= (4+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = (4+\sqrt{15})(8-2\sqrt{15}) = 2(4^2 - \sqrt{15}^2) = 2 \end{aligned}$$

2/ $B = \sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

 Giải

$$B = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$3/ A = (\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}})\sqrt{2} + \sqrt{20} \quad \text{ĐS: } 3 + \sqrt{5}$$

$$4/ A = \sqrt{2}(\sqrt{21} + 3)\sqrt{5 - \sqrt{21}} \quad \text{ĐS: } 4\sqrt{3}$$

II/ Rút gọn biểu thức có chứa căn dưới mẫu

Vd : Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{6}{\sqrt{7} + 2} + \sqrt{\frac{2}{8 + 3\sqrt{7}}}$$

Để bỏ căn dưới mẫu ta nhân cả tử và mẫu cho lượng liên hiệp của mẫu

$\sqrt{7} + 2$ có lượng liên hiệp là $\sqrt{7} - 2$

$8 + 3\sqrt{7}$ có lượng liên hiệp là $8 - 3\sqrt{7}$

(áp dụng hằng đẳng thức $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)

 Giải

$$A = \frac{6(\sqrt{7} - 2)}{(\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)} + \sqrt{\frac{2(8 - 3\sqrt{7})}{(8 + 3\sqrt{7})(8 - 3\sqrt{7})}} = \frac{6(\sqrt{7} - 2)}{7 - 4} + \sqrt{\frac{2(8 - 3\sqrt{7})}{64 - 63}}$$

$$= 2(\sqrt{7} - 2) + \sqrt{16 - 6\sqrt{7}} = 2(\sqrt{7} - 2) + \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} = 2\sqrt{7} - 4 + 3 - \sqrt{7} = \sqrt{7} - 1$$

✎ Bài tập : Rút gọn các biểu thức sau

$$B = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} - \frac{2 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \quad \text{ĐS: } -1$$

**BÀI
2**

RÚT GỌN BIỂU THỨC

Vd1: cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

a/ Tìm điều kiện xác định của P

b/ Rút gọn biểu thức P

c/ Tính giá trị của P ,biết $x = \sqrt{2} - 1$; $y = \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$

 Giải

a/ Để xác định điều kiện của biểu thức ta chú ý đến biểu thức trong căn

$A \geq 0$ và mẫu số $\neq 0$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x.y > 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq y \end{cases}$$

$$b/ P = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$$

c/ Thay $x = \sqrt{2} - 1$; $y = \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$ ta có

$$\sqrt{2} - 1 - \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{(2\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} + 1 = -\sqrt{2}$$

 Bài tập : Rút gọn các biểu thức sau

$$1/ \text{ Cho biểu thức } A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{x - \sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + 1}$$

a/ Tìm điều kiện xác định của A

b/ Rút gọn biểu thức A

c/ Tìm x sao cho $A < 0$

 Giải

$$a/ \text{ Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 1 \neq 0 \\ x + \sqrt{x} \neq 0 \\ x\sqrt{x} + 1 \neq 0 \\ x - \sqrt{x} + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

$$b/ A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{x\sqrt{x} + 1}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x}^3 + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3 + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

c/ Tìm x sao cho $A < 0$

$$A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} < 0 \text{ vì } x > 0 \text{ nên ta có : } \sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow x < 1$$

Vậy $0 < x < 1$

$$2/ \text{ Cho biểu thức } B = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$$

a/ Tìm điều kiện xác định của B

b/ Rút gọn biểu thức B

c/ Tìm các giá trị nguyên của x để B nhận các giá trị nguyên

ĐS:

a/ $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

b/ $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

c/ $B = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$ các giá trị nguyên của x là $x = 1$; 16; 25; 49.

3/ Cho biểu thức

$$C = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$$

a/ Tìm điều kiện xác định của C

b/ Rút gọn biểu thức C

c/ Tìm x để $C < 1$

d/ Tìm x để C nhận giá trị nhỏ nhất

ĐS:

a/ đk $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

b/ $C = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

c/ Tìm giá trị của x để $C < 1$

$x \geq 0$ và $x \neq 1$

d/ Giá trị nhỏ nhất $C = -1$ khi $x = 0$

Bài 3

LUYỆN TẬP

1/ Tính

a/ $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - 2\sqrt{5}$ ĐS: $1-\sqrt{5}$

b/ $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$

 Giải

$$A = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$$

Đặt $B = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$

$$B^2 = 4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} - 2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})} = 8 - 2\sqrt{16-7} = 8 - 6 = 2$$

$$B = \sqrt{2}$$

$$A = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

2/ Rút gọn biểu thức

a/ $A = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$

ĐS: 3

b/ $B = \sqrt{13-\sqrt{160}} + \sqrt{53+4\sqrt{90}}$

ĐS: $4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

3/ Cho $P(x) = \frac{\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}}{2(x-2)}$

a/ Rút gọn biểu thức $P(x)$ ĐS: $P(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ (đk: $x > 2$)

b/ Tìm x để $P(x) = \frac{1}{3}$ ĐS: $x = 11$

4/ Thu gọn các biểu thức sau

a/ $A = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6-3\sqrt{3}}$ ĐS : 6

b/ $B = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}-1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}+2x-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$; $x \neq 4$)

ĐS : $B = 6$

5/ Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{x}{x-\sqrt{x}+1} \right) : \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$

a/ Rút gọn biểu thức P

b/ Tìm x để $P < 0$

 Giải

$$\begin{aligned} \text{a/ } P &= \left(\frac{x-\sqrt{x}+1-x}{x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1} = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left(\frac{1-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2} \right) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b/ Tìm x để $P < 0$

$$P < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < 0$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow 1-\sqrt{x} < 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 1 \Rightarrow x > 1$$

Vậy khi $x > 1$ thì $P < 0$

6/ Rút gọn biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1} \text{ với } x > 0 ; x \neq 1.$$

ĐS : $A = -\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

7/ Rút gọn biểu thức

$A = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$ ĐS : 1

8/

a/ Rút gọn biểu thức

$M = \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ với $a \neq 1$; $a > 0$ ĐS : $M = \frac{-2}{1+\sqrt{a}}$

b/ Tính giá trị của M khi $a = \frac{1}{9}$ ĐS : $M = -\frac{3}{2}$

9/ Cho biểu thức

$A = \left(\frac{6x+1}{x^2-6x} + \frac{6x-1}{x^2+6x} \right) \cdot \frac{x^2-36}{12x^2+12}$ (với $x \neq 0$; $x \neq -6$; $x \neq 6$)

a/ Rút gọn biểu thức A

ĐS: $A = \frac{1}{x}$

b/ Tính giá trị của biểu thức A với $x = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$

ĐS: $\sqrt{5}-2$

10/ Cho biểu thức $A = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right)$

a/ Với điều kiện nào của x thì A xác định ĐS: đk $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

b/ Rút gọn biểu thức A ĐS : $A = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

c/ Chứng minh $A > 1$ với mọi $x > 0$ và $x \neq 1$

 Giải

$A > 1 \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1 > \sqrt{x} \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1 > 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 > 0 \forall x > 0 ; x \neq 1.$

11/ Rút gọn biểu thức

$M = \sqrt{x+2\sqrt{3x-9}} + \sqrt{x-2\sqrt{3x-9}}$

ĐS : đk $x \geq 3$

$3 \leq x < 6$ thì $M = \sqrt{12}$

$x \geq 6$ thì $M = \sqrt{4x-12}$

12/ Cho $P(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} + \sqrt{2x^2+x^4+1}$

a/ Rút gọn P(x) ĐS: $P(x) = (x^2+1)\left(\frac{x}{|x|}+1\right)$

b/ Tính P(x) khi $x = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ĐS : 4

13/ Trục căn số ở mẫu

a/ $\frac{1}{5-2\sqrt{3}}$ ĐS: $\frac{5+2\sqrt{3}}{13}$

b/ $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ ĐS: $2(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

c/ $\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ĐS: $\frac{-2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-4}$

14/ Tính

a/ $A = \sqrt{0,1} + \sqrt{0,9} + \sqrt{6,4} + \sqrt{0,4} + \sqrt{44,1}$ ĐS: $35\sqrt{0,1}$

b/ $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$ ĐS: $-\frac{17}{3}\sqrt{3}$

15/ Rút gọn biểu thức

a/ $A = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$ ĐS : 1

b/ $B = 4 \cdot \frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}-\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{8}{2+\sqrt{3}}}$ ĐS: 0

16/ Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)$$

a/ Rút gọn B ĐS : đk $x > 0$; $x \neq 1$; $B = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$

b/ Tìm các giá trị của x để $B > 0$ ĐS : $0 < x < 1$

c/ Tìm các giá trị của x để $B = -2$ ĐS : $x = (1+\sqrt{2})^2$

17/ Cho $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$

a/ Rút gọn A ĐS : $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

b/ Tìm x nguyên để A nhận giá trị nguyên

ĐS : $x=4$; $x=9$ thì A nguyên

18/ Rút gọn các biểu thức sau

a/ $A = \sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{2}$ ĐS: $\sqrt{5}$

b/ $B = (a-1)\sqrt{\frac{a}{a^2-2a+1}}$ ($a > 1$) ĐS : $B = \sqrt{a}$

19/

a/ so sánh $\sqrt{25-9}$ và $\sqrt{25}-\sqrt{9}$

b/ Tính giá trị của biểu thức

$A = \frac{1}{2+\sqrt{5}} + \frac{1}{2-\sqrt{5}}$ ĐS : -4

20/ Thu gọn các biểu thức sau

$$A = \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}} \quad \text{ĐS : } 5$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(\frac{x + xy}{1 - xy} \right) \quad \text{ĐS : } \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Bài 4

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CĂN THỨC

Vd1: giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$ (với $x \geq 2$)

b/ $\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+11+6\sqrt{x+2}} = 9$

 **Giải**

a/ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2(1)$ (với $x \geq 2$)

với điều kiện đề bài cho $x \geq 2$, thỏa điều kiện có nghĩa của biểu thức nên ta biến đổi để bỏ dấu căn

$$(1) \Rightarrow \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x = 2$$

Thay vào phương trình (1) ta có $\sqrt{4} = 2$ (đúng)

Vậy nghiệm của phương trình $x = 2$

$$b/ \sqrt{x+6} + 4\sqrt{x+2} + \sqrt{x+11} + 6\sqrt{x+2} = 9 \quad (1)$$

điều kiện : $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$$(1) \Rightarrow \sqrt{x+2} + 4\sqrt{x+2} + 4 + \sqrt{x+2} + 6\sqrt{x+2} + 9 = 9$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x+2} + 2| + |\sqrt{x+2} + 3| = 9 \Rightarrow 2\sqrt{x+2} = 4 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào phương trình (1) ta có : $\sqrt{16} + \sqrt{25} = 9$ (đúng)

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Vd2: giải các phương trình sau

$$a/ \sqrt{x+1} = x-1$$

$$b/ \sqrt{3x-1} - \sqrt{x+4} = 1$$

$$c/ \sqrt{4-6x-x^2} = x+4$$

 Giải

$$a/ \sqrt{x+1} = x-1 \quad (1)$$

$$\text{điều kiện : } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

$$(1) \Rightarrow x+1 = (x-1)^2 \Rightarrow x+1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

So với điều kiện ta chọn $x=3$, thay $x=3$ vào phương trình (1) ta có $\sqrt{4} = 2$ (đúng).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

$$b/ \sqrt{3x-1} - \sqrt{x+4} = 1 \quad (1)$$

$$\text{điều kiện } \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

(1) $\Rightarrow \sqrt{3x-1} = 1 + \sqrt{x+4}$ vì cả hai vế phương trình đều ≥ 0 nên ta bình phương 2 vế ta có:

$$3x-1 = 1 + x + 4 + 2\sqrt{x+4} \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = 2x-6 \Rightarrow \sqrt{x+4} = x-3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x+4 = x^2 + 9 - 6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$

$$c/ \sqrt{4-6x-x^2} = x+4 \quad (1)$$

$$\text{điều kiện } \begin{cases} 4 - 6x - x^2 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6 + \sqrt{52}}{-2} \leq x \leq \frac{6 - \sqrt{52}}{-2} \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 4 - 6x - x^2 = x^2 + 16 + 8x \Rightarrow 2x^2 + 14x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

So với điều kiện ta chọn $x = -1$, thay $x = -1$ vào phương trình (1) ta có

$$\sqrt{9} = 3 \text{ (đúng).}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$.

 Bài tập : Giải các phương trình sau

$$1/ \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$$

$$\text{ĐS : } \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$2/ \sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}$$

$$\text{ĐS : } x = 15$$

$$3/ \sqrt{x + 6 - 4\sqrt{x + 2}} + \sqrt{x + 11 - 6\sqrt{x + 2}} = 1$$

$$\text{ĐS : } 2 \leq x \leq 7$$

$$4/ \sqrt{x^2 + 3x - 4} = \sqrt{2(x + 1)}$$

ĐS : điều kiện $x \geq 1$, nghiệm của phương trình là $x = 2$

$$5/ \sqrt{2x + 5} + \sqrt{x - 1} = 8$$

$$\text{ĐS : } x = 10$$

$$6/ \sqrt{5x + 7} = \sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x + 4}$$

$$\text{ĐS : } x = \frac{-4}{3}$$

7/ Giải phương trình

$$a/ (x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6 \quad (1)$$

 Giải

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x^2 + 5x + 2} \text{ đk: } u \geq 0$$

$$\Rightarrow u^2 = x^2 + 5x + 2 \Rightarrow x^2 + 5x = u^2 - 2$$

$$(1) \Rightarrow x^2 + 5x + 4 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6 \Rightarrow u^2 - 2 + 4 - 3u = 6$$

$$\Rightarrow u^2 - 3u - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = -1 \text{ (loại)} \\ u = 4 \end{cases}$$

$$u = 4 \Rightarrow 4 = \sqrt{x^2 + 5x + 2} \Rightarrow 16 = x^2 + 5x + 2 \Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

$$\text{Thay } x = 2 \text{ và phương trình (1) ta có : } 18 - 3\sqrt{16} = 6$$

$$\Rightarrow 6 = 6 \text{ (đúng)}$$

$$\text{Thay } x = -7 \text{ vào phương trình (1) ta có : } 18 - 3\sqrt{16} = 6$$

$$\Rightarrow 6 = 6 \text{ (đúng)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x_1 = 2$; $x_2 = -7$

$$b/ 3x^2 + 3x = 2\sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$\text{ĐS : } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

8/ Giải phương trình

a/ $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$ ĐS : $x = \pm 2\sqrt{2}$

b/ $2(1-x)\sqrt{x^2 + 2x - 1} = x^2 - 2x - 1$ ĐS: $x = -1 \pm \sqrt{6}$

Bài 5

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I/ Giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm

Ví dụ : giải phương trình $3x^2 + 5x - 1 = 0$

 **Giải**

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 12 = 37$$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$= \frac{-5 + \sqrt{37}}{6}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{37}}{6}$$

 **Bài tập: giải các phương trình sau**

a/ $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ĐS: $x_1 = 3; x_2 = 0,5$

b/ $6x^2 + x + 5 = 0$ ĐS : vô nghiệm

c/ $6x^2 + x - 5 = 0$ ĐS : $x_1 = -1; x_2 = \frac{5}{6}$

d/ $3x^2 + 5x + 2 = 0$ ĐS : $x_1 = -1; x_2 = -\frac{2}{3}$

e/ $y^2 - 8y + 16 = 0$ ĐS : $y_1 = y_2 = 4$

f/ $16z^2 + 24z + 9 = 0$ ĐS : $z_1 = z_2 = -\frac{3}{4}$

* Các trường hợp đặc biệt của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

- Nếu $a+b+c=0$ thì $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$

- Nếu $a-b+c=0$ thì $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$

Ví dụ :

a/ Giải phương trình $2x^2 + 3x - 5 = 0$

vì $a+b+c = 2+3-5=0$ nên $x_1 = 1; x_2 = -\frac{5}{2}$

b/ Giải phương trình $11x^2 - 10x - 21 = 0$

vì $a-b+c = 11+10-21=0$ nên $x_1 = -1; x_2 = \frac{21}{11}$

II/ Định lý Vi-ét và ứng dụng

1/ Định lý Vi-ét

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi đó

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

2/ Ứng dụng

Ví dụ 1: tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

 **Giải :**

$$\Delta' = b'^2 - ac = m^2 - 2m + 3 = m^2 - 2m + 1 + 2 = (m-1)^2 + 2 > 0 \quad \forall m$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \forall m$

Ta có : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \quad (1)$

Theo định lý vi-ét $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 3$

Thay vào (1) ta có : $(2m)^2 - 2(2m-3) = 4m^2 - 4m + 6 = (2m-1)^2 + 5 \geq 5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ là 5, dấu “=” xảy ra khi $2m-1 = 0 \Rightarrow$

$$m = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 2: tìm m để phương trình $x^2 + 4x + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu

 Giải :

$$\Delta' = b'^2 - ac = 4 - m$$

Để phương trình có hai nghiệm trái dấu thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0$$

Vậy khi $m < 0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt và cùng dương

 Giải :

$$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - m$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt và cùng dương thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 2 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 1$$

Vậy khi $0 < m < 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt và cùng dương

 Bài tập:

1/ Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$

a/ Tìm m để phương trình có nghiệm

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1 x_2 - x_1 - x_2$

ĐS : a/ $m \geq 1$; b/ Giá trị nhỏ nhất của A là $-\frac{5}{4}$ khi $m = \frac{3}{2}$

2/ Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$, tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$

ĐS : $m = \pm 1$.

3/ Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu, cùng dấu

ĐS : để phương trình có hai nghiệm trái dấu $m < \frac{1}{2}$

Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu $m > \frac{1}{2}$

4/ Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

ĐS: $m < 3$

5/ Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và cùng dương. ĐS: $m > 1$

6/ Tìm m để phương trình $x^2 - 2x + m - 8 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 0$

$$\text{ĐS : } m = \frac{35}{4}$$

7/ Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m-3=0$ có hai nghiệm khác dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối

$$\text{ĐS : } m=1.$$

**Bài
6**

LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm m để hai phương trình sau đồng nghiệm

a/ $x^2 + mx - 2 = 0$ và $x^2 - 2x + m = 0$ NS : $m = -2$

b/ $x^2 + mx + 1 = 0$ và $x^2 + x + m = 0$

c/ $x^2 + 2x + m = 0$ và $x^2 + mx + 2 = 0$

Bài 2 : Tìm m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

$$\text{NS : } 1 < m < \frac{13}{4}$$

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ với m là tham số và x là ẩn số.

- a) Giải phương trình vôùi $m = 1$
 b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2
 c) Vôùi nhiều kiện câu (b) hãy tìm m để biểu thức $A = x_1x_2 - x_1 - x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 4 : Cho phương trình : $x^2 + 2mx + m - 1 = 0$.

- a) Giải phương trình khi $m = 2$.
 b) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt vôùi mọi m . Hãy xác định m để phương trình có nghiệm đồng.

Bài 5: Giải Phương trình và hệ phương trình sau:

a/ $3x^2 - 4x = 0$

b/ $5x^2 - 12x + 7 = 0$

c/ $3x^2 + 5x + 2 = 0$

d/ $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

Bài 6:

a) Rút gọn biểu thức: $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

b) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{x - 3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x} - 3} \right) (x - 3\sqrt{x})$ (với $x > 0; x \neq 9$)

Bài 7: Cho phương trình bậc hai : $x^2 - 4x + 2(m - 1) = 0$ (1) với m lư tham số.

a/ Giải phương trình (1) với $m = -2$.

b/ Tìm m để phương trình cả hai nghiệm phân biệt.

Bài 8

a) Rút gọn biểu thức :

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

b) Rút gọn biểu thức: $\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} + 2) - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

**Bài
7**

GIAÛI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH HOẶC HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: hai vợ chồng cùng nhau vào một cửa hàng có nhiều thì sau 4 giờ 48 phút sẽ lấy hết. Nếu mỗi người đi một mình trong 3 giờ vào cửa hàng thì mỗi người lấy $\frac{3}{4}$ cửa hàng. Hỏi mỗi người cùng một mình thì trong bao lâu mỗi người lấy hết?

Giải

4 giờ 48 phút = $\frac{24}{5}$ giờ

Gọi x là thời gian mỗi người đi một mình lấy hết ($x > 0$)

Gọi y là thời gian mỗi người đi hai người cùng một mình lấy hết ($y > 0$)

Một giờ với thòu nhát chây : $\frac{1}{x}$ be

Một giờ với thòu hai chây : $\frac{1}{y}$ be

Một giờ ca hai với cươg chây ñoïc $\frac{5}{24}$ be

Theo ñeà baøi ta cò phoàng trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$ (1)

3 giờ với thòu nhát chây ñoïc : $\frac{3}{x}$ be

4 giờ với thòu hai chây : $\frac{4}{y}$ be

Ca hai với chây ñoïc $\frac{3}{4}$ be ñoïc nên ta cò phoàng trình:

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Tò (1) và (2) ta cò he phoàng trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Giaù ra ta ñoïc : $x=12$; $y=8$

Vaây : với thòu nhát chây ñaày be trong 12 giờ, với thòu hai chây ñaày be trong 8 giờ.

Ví dụ 2: Quaõg ñoõng AB daøi 90km, cò hai oato khòu haõnh cươg moät luùc. Oa to thòu nhát ñi tò A ñeán B , oato thòu hai ñi tò B ñeán A. Sau moät giờ hai xe gaèp nhau và tieáp tuïc ñi. Xe oato thòu hai tòu A tròu xe thòu nhát tòu B laø 27 phuùt. Tíh vaõn toác moãi xe.

 Giaù

$$27 \text{ phuùt} = \frac{9}{20} \text{ giờ}$$

Goï x laø vaõn toác oato thòu nhát ($x>0$)

Goï y laø vaõn toác oato thòu hai ($y>0$)

Quaõg ñoõng oato thòu nhát ñi sau 1 giờ laø : x

Quaõg ñoõng oato thòu hai ñi sau 1 giờ laø : y

Hai oato gaèp nhau sau 1 giờ nên ta cò phoàng trình : $x+y = 90$ (1)

Thò gian ñi cuõa oato thòu nhát laø : $\frac{90}{x}$

Thò gian ñi cuõa oato thòu hai laø : $\frac{90}{y}$

Xe thòu hai tòu A tròu xe thòu nhát tòu B laø 27 phuùt nên ta cò phoàng trình :

$$\frac{90}{x} - \frac{90}{y} = \frac{9}{20} \quad (2)$$

Tò (1) và (2) ta cò he phoàng trình

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ \frac{90}{x} - \frac{90}{y} = \frac{9}{20} \end{cases}$$

giaù ra ta ñoïc : $x= 40$; $y=50$

Vaây : vaõn toác oato thòu nhát 40km/h; vaõn toác oato thòu hai 50km/h.

 Baøi taäp:

Bài 1: Hai vợ chồng cùng chèo thuyền vào một cái bể thì 6 giờ nữa sẽ về. Nếu mỗi vợ chồng một mình chèo thì thời gian sẽ lâu hơn thời gian của hai vợ chồng cùng chèo là 5 giờ. Tính thời gian cần để mỗi vợ chồng một mình chèo bể.

NS: Vợ chồng cùng chèo riêng trong 10 giờ; vợ chồng hai chèo riêng trong 15 giờ.

Bài 2: Một đoàn xe cần chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc mỗi đoàn xe chở 3 tấn hàng nên mỗi xe chở ít hơn một tấn so với dự định. Hỏi đoàn xe cần bao nhiêu chiếc? Biết rằng số hàng trên tất cả các xe chở thừa nhau.

NS: Cần bao nhiêu chiếc 9 xe.

Bài 3: Hai người cùng làm một công việc trong 16h thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì xong 25% công việc. Hỏi mỗi người làm riêng công việc đó thì bao lâu mới xong.

NS: Người thứ nhất làm xong công việc trong 24 giờ

Người thứ hai làm xong công việc trong 48 giờ

Bài 4: Hai vợ chồng cùng chèo thuyền vào một cái bể cạn sau 1h30 phút thì về. Nếu mỗi vợ 1 trong 15 phút rồi khoả lại và mỗi vợ 2 trong 20 phút thì mỗi sẽ về. Hỏi nếu chèo riêng mỗi vợ thì sau bao lâu nữa sẽ về?

NS: Vợ 1 chèo nữa sẽ về trong $\frac{15}{4}$ giờ; Vợ 2 chèo nữa sẽ về trong $\frac{5}{2}$ giờ.

Bài 5: Một công nhân phải làm 420 sản phẩm. Do mỗi ngày người đó làm tăng thêm 5 sản phẩm nên mỗi ngày hoàn thành công việc sớm hơn 7 ngày. Tính số ngày người đó phải làm.

NS: số ngày người đó phải làm : 21 ngày

Bài 6: Hai máy cày cùng làm việc trong 5 giờ thì cày xong $\frac{1}{18}$ thửa ruộng. Nếu máy thứ nhất làm việc trong 6 giờ và máy thứ hai làm việc trong 10 giờ thì hai máy cày sẽ cày 10% thửa ruộng. Hỏi mỗi máy làm việc riêng thì cày xong thửa ruộng trong bao nhiêu giờ?

NS: Máy cày 1 làm xong trong 360 giờ; máy cày 2 làm xong trong 120 giờ.

Bài 7: Một ô tô đi từ A đến C qua B. Biết quãng đường AC dài 270km. Xe đi từ A đến B với vận tốc 60km/h, đi từ B đến C với vận tốc 40km/h. Tính thời gian ô tô đi từ A đến B, từ B đến C. Biết thời gian ô tô đi từ A đến C là 6 giờ.

NS: thời gian đi từ A đến B : 1,5 giờ; Thời gian đi từ B đến C : 4,5 giờ.

Bài 8: Một người đi xe đạp từ A đến B cách 120km. Khi đi mỗi giờ đi được nửa quãng đường thì nhận thấy tốc độ lúc đầu không thuận tiện nên tăng vận tốc đi thêm 3km/h. Anh đi nhanh hơn với vận tốc đi thêm 5km/h và đến B đúng thời gian quy định. Tính :

a) Vaãn toác dõĩ kieán

b) Thõĩ gian ñĩ heát nõũa quaoĩng ñõõĩng ñĩau tieãn.

ÑS : vaãn toác dõĩ kieán 15km/h; thõĩ gian ñĩ heát nõũa quaoĩng ñõõĩng ñĩau: 5 giõĩ.

Baõi 9: Moät xe maũy khõũĩ haõnh tõĩ A luũc 6 giõĩ 15phuũt vũũĩ vaãn toác 50km/h ñĩeán B nghĩe 1giõĩ 30 phuũt roài trũũ veà A vũũĩ vaãn toác 40km/h. Ñĩeán A luũc 14giõĩ 30phuũt. Tĩĩn quaoĩng ñõõĩng AB.

ÑS : Quaoĩng ñõõĩng AB daĩĩ 150km.

Baõi 10: Moät ngõõĩ ñĩ boã tõĩ A ñĩeán B vũũĩ vaãn toác 4km/h roài ñĩ oãtoã tõĩ B ñĩeán C vũũĩ vaãn toác 40km/h. Luũc veà ngõõĩ ñĩu ñĩ xe ñĩaĩp caũ quaoĩng ñõõĩng CA vũũĩ vaãn toác 16km/h. Bĩeát quaoĩng ñõõĩng AB ngaĩn hũn quaoĩng ñõõĩng BC 24km vaõ thõĩ gian luũc veà baĩng thõĩ gian ñĩ. Tĩĩn quaoĩng ñõõĩng AC.

ÑS: quaoĩng ñõõĩng AC daĩĩ 36km.

Baõi 11: Moät ca noã xuoãĩ moät khuũc soãĩng daĩĩ 50km roài ngõõĩc laĩĩ 32km thì heát 4giõĩ 30 phuũt. Tĩĩn vaãn toác doĩng nõõũc bĩeát vaãn toác canoã khi nõõũc ñõũĩng yeãn laõ 18km/h.

ÑS: vaãn toác doĩng nõõũc : 2km/h

Baõi 12: Moät chĩeác thũyeãn khõũĩ haõnh taĩĩ beãn A. Sau 5giõĩ 20 phuũt moät canoã xuoãĩt phaũt tõĩ A ñĩuãĩ theo vaõ gaĩp thũyeãn taĩĩ vũ trĩ caũĩh A 20km. Bĩeát trong 1giõĩ canoã ñĩ nhanh hũn thũyeãn 12km. Tĩĩn vaãn toác cuũa thũyeãn.

ÑS: vaãn toác cuũa thũyeãn laõ 3km/h.

Baõi 13: Moät ngõõĩ ñĩ xe gaĩn maũy ñĩ tõĩ A ñĩeán B caũĩh 90km. Vĩ caãn phaũĩ ñĩeán B trũũũc giõĩ dõĩ ñũĩh 45 phuũt neãn phaũĩ taĩĩng vaãn toác moãĩ giõĩ theãm 10km. Tĩĩn vaãn toác dõĩ ñũĩh.

ÑS: vaãn toác dõĩ ñũĩh: 30km/h

Baõi 14 : Moät canoã xuoãĩ khuũc soãĩng 90km roài ngõõĩc laĩĩ 36km. Bĩeát thõĩ gian xuoãĩ ñĩĩĩũ hũn thõĩ gian ngõõĩc 2 giõĩ vaõ vaãn toác khi xuoãĩ lũũn hũn vaãn toác khi ngõõĩc 6km/h. Tĩĩn vaãn toác xuoãĩ doĩng vaõ ngõõĩc doĩng.

ÑS : vaãn toác xuoãĩ doĩng 18km/h; vaãn toác ngõõĩc doĩng 12km/h.

Vaãn toác xuoãĩ doĩng 15km/h; vaãn toác ngõõĩc doĩng 9km/h.

Baõi 15: Quaoĩng ñõõĩng soãĩng tõĩ beãn soãĩng A ñĩeán beãn soãĩng B daĩĩ 48km. Moät canoã xuoãĩ doĩng tõĩ A ñĩeán B roài ngõõĩc veà A. Thõĩ gian veà hũn thõĩ gian xuoãĩ laõ 30 phuũt. Vaãn toác canoã neãũ nõõũc khoãĩng chaũy laõ 28km/h. Tĩĩn vaãn toác doĩng nõõũc.

ÑS: vaãn toác doĩng nõõũc : 4km/h.

Baõi 16 : Trong moät cuoãĩ ñĩũ, ba tay ñĩũ cuũĩng khõũĩ haõnh moät luũc. Moãĩ giõĩ ngõõĩ thũũ hai chaãm hũn ngõõĩ thũũ nhaát 15km vaõ nhanh hũn ngõõĩ thũũ ba 3 km. Ngõõĩ thũũ hai ñĩeán ñĩĩĩh chaãm hũn ngõõĩ thũũ nhaát 12 phuũt vaõ sũũĩ hũn ngõõĩ thũũ ba 3 phuũt. Tĩĩn thõĩ gian chaũy heát quaoĩng ñõõĩng cuũa ba tay ñĩũ.

ÑS : Thõĩ gian ngõõĩ thũũ nhaát : 1 giõĩ

Thõĩ gian ngõõĩ thũũ hai : 1,2 giõĩ

Thõĩ gian ngõõĩ thũũ ba: 1,25 giõĩ

Bài 17 : Hai nữ xây dựng nếu làm chung thì mất 6 ngày nữa hoàn thành công việc. Nếu làm riêng thì nữ I làm lâu hơn nữ II 5 ngày. Hỏi mỗi nữ khi làm riêng thì mất bao nhiêu ngày?

NS: nữ I làm riêng mất 15 ngày; nữ II làm riêng mất 10 ngày.

Bài 18: Hai công nhân mỗi giờ làm được một loại sản phẩm có số lượng và thời gian nhỏ nhau. Người thứ nhất mỗi giờ làm được một sản phẩm nên hoàn thành công việc trước thời hạn 2 giờ. Người thứ hai mỗi giờ làm được thêm 2 sản phẩm nên vừa hoàn thành công việc trước 3 giờ vừa vượt mức 7 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi người mỗi giờ.

NS: số sản phẩm mỗi người mỗi giờ : 180 sản phẩm.

PHẦN 2

HÌNH HOÏC

**Baøi
8**

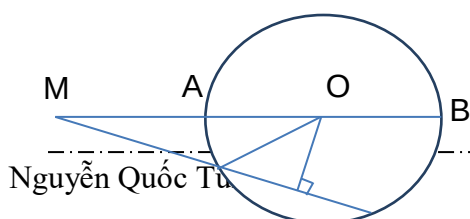
**CHÖÙNG MINH CAÙC ÑAÚNG THÖÙC
VAØ BAÁT ÑAÚNG THÖÙC HÌNH HOÏC**

Baøi 1: Töø ñieåm M ôû ngoaøi ñöôøng troøn $(O;R)$, keù ñöôøng thaúng qua O caét ñöôøng troøn taïi hai ñieåm A vaø B (A naèm giöõa M vaø O).

a) Chöùng minh raøng : $MA \cdot MB = MO^2 - R^2$

b) Keù caùt tuyeaán thöù hai MCD vôùi ñöôøng troøn (C naèm giöõa M vaø D). Chöùng minh : $MC \cdot MD = MA \cdot MB$

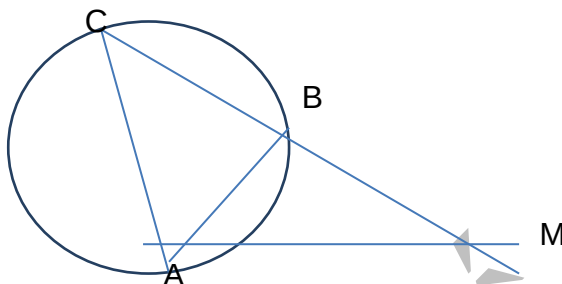
Giải :



- a) Ta có : $MA \cdot MB = (MO - OA) \cdot (MO + OB) = (MO - R) \cdot (MO + R) = MO^2 - R^2$
- b) Ta có : $MC \cdot MD = (MI - IC) \cdot (MI + ID) = MI^2 - IC^2 = MO^2 - OI^2 - (OC^2 - OI^2) = MO^2 - OC^2 = MO^2 - R^2$.
- Maø $MA \cdot MB = MO^2 - R^2$ (chöùng minh trên) $\Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Baøi 2: Töø ñieäm M naèm ngoaøi ñöôøng troøn (O), keù tieáp tuyeán MA vaø caùt tuyeán MBC ñeán ñöôøng troøn. Chöùng minh raèng : $MA^2 = MB \cdot MC$.

Giaûi :



Xeùt $\triangle MAB$ vaø $\triangle MCA$ ta coù : $\widehat{BAM} = \widehat{MCA}$ (goùc giöõa tia tieáp tuyeán vaø daây cung vaø goùc noãi tieáp cuøng chaén moät cung)

$\hat{M}$ chung

$\Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MCA$ (g-g)

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB \cdot MC$$

Baøi 3: Töø ñieäm M naèm ngoaøi ñöôøng troøn (O), keù hai caùt tuyeán MAB vaø MCD. Chöùng minh raèng : $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Baøi 4: Töø ñieäm M naèm ngoaøi ñöôøng troøn (O), keù caùc tieáp tuyeán MA, MB ñeán ñöôøng troøn (A, B laø caùc tieáp ñieäm), veõ caùc tuyeán MCD (khoaùng qua taâm O, C naèm giöõa M vaø D). Goïi I laø trung ñieäm cuûa daây CD, tia OI caét ñöôøng thaúng AB taïi E. Goïi H laø giao ñieäm cuûa MO vaø AB. Chöùng minh : $OH \cdot OM = OI \cdot OE$.

Baøi 5: Chöùng minh raèng : “Trong moät töù giaùc noãi tieáp ñöôøng cheùo baèng toaùng caùc tích cuûa caùc caëp caïnh ñoái dieän”.

Baøi 6: Cho ñöôøng troøn (O; R) vaø daây cung AB vôùi $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Hai tieáp tuyeán taïi A vaø B cuûa ñöôøng troøn caét nhau ôû C. Treân caùc ñoain thaúng BC, CA vaø AB laàn löôit laáy caùc ñieäm I, J vaø K sao cho K khoaùng truong vôùi A vaø B vaø $\widehat{IKJ} = 60^\circ$. Chöùng minh : $AJ \cdot BI \leq \frac{AB^2}{4}$

Baøi 7 : Trong caùc töù giaùc noãi tieáp ñöôøng troøn (O; R) cho troøùc. Tìm töù giaùc coù $AB \cdot DC + AD \cdot BC$ lôùn nhaát.

Baøi 8 : Cho ñöôøng thaúng (d) vaø ñöôøng troøn (O; R) coù khoaùng caùch töø taâm O ñeán (d) laø $OH > R$. Laáy hai ñieäm baát kyø A treân (d) vaø B treân (O; R). Haõy chæ ra vò trí cuûa A vaø B sao cho ñoà daøi AB ngaén nhaát vaø haõy chöùng minh ñieàu aáy.

Baøi 9: Cho ñöôøng troøn $(O;R)$ daây cung AB coá ñònh, M laø ñieåm di ñoäng treân daây AB , qua M veõ cung CD . Haõy xaùc ñònh vò trí ñieåm M ñeå tích $MC \cdot MD$ lôùn nhaát.

Baøi 10: Cho tam giaùc ABC nhòin. D laø ñieåm di ñoäng treân caïnh BC . Goïi E vaø F laàn löôït laø hình chieáu cuûa D leân AB vaø AC . Haõy xaùc ñònh vò trí ñieåm D ñeå ñoà daøi ñoaïn thaúng EF nhòu nhaát.

**Baøi
9**

CAÙC BAØI TOAÙN VEÀ TIEÁP TUYEÁN

Baøi 1: Töø ñieåm A naèm ngoaøi ñöôøng troøn $(O;R)$ veõ ñöôøng thaúng (d) khoâng ñi qua taâm O caét ñöôøng troøn taïi hai ñieåm B vaø C (B naèm giöõa A vaø C). Caùc tieáp tuyeán taïi B vaø C caét nhau ôû D . Veõ DH vuông goùc vôùi AO (H thuôäc AO), DH caét cung nhòu BC taïi M . Goïi E laø giao ñieåm cuûa DO vaø BC . Chöùng minh AM laø tieáp tuyeán cuûa ñöôøng troøn $(O;R)$.

Baøi 2: Töø ñieåm M naèm ngoaøi ñöôøng troøn (O) veõ hai tieáp tuyeán MA, MB ñeán ñöôøng troøn $(A, B$ laø caùc tieáp ñieåm). Veõ ñöôøng kính BC cuûa ñöôøng troøn (O) , MC caét ñöôøng troøn (O) taïi D . Goïi I laø trung ñieåm daây CD , tia OI caét ñöôøng thaúng AB taïi K . Chöùng minh raêng KC laø tieáp tuyeán cuûa ñöôøng troøn (O) .

Baøi 3: Töø ñieåm A naèm ngoaøi ñöôøng troøn (O) veõ caùt tuyeán ABC ñeán ñöôøng troøn. Veõ ñöôøng troøn ñi qua 3 ñieåm B, O, C vaø (BOC) caét ñoaïn AO taïi H . Ñöôøng thaúng vuông goùc vôùi AO taïi H caét ñöôøng troøn (O) taïi hai ñieåm D vaø E . Chöùng minh raêng AD, AE laø caùc tieáp tuyeán cuûa ñöôøng troøn (O) .

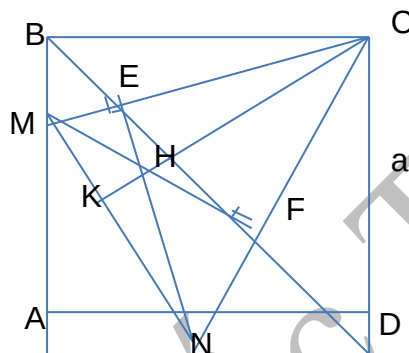
Baøi 4: Cho tam giaùc ABC vuông taïi A ($AB < AC$). Treân caïnh AC laáy ñieåm M sao cho $\widehat{ABM} = \hat{C}$. Veõ ñöôøng troøn ñöôøng kính CM vaø caét tia

BM ôû H. Ch÷uõng minh raẽng HA laø tieáp tuyeán cuûa ñöôøng troøn ñöôøng kính CM.

Baøi 5: Cho hình vuõng ABCD caïnh a. Treân hai caïnh AB vaø AD laàn löôít laáy hai ñieám M vaø N sao cho $\widehat{MCN} = 45^\circ$ (M, N khoâng tröông vuøi ñænh hình vuõng). CM, CN laàn löôít caét BD taïi E vaø F. Goïi H laø giao ñieám cuûa NE vaø MF.

- Ch÷uõng minh caùc töù giaùc BCFM vaø ECDN noãi tieáp ñöôïc.
- Ch÷uõng minh MN laø tieáp tuyeán cuûa ñöôøng troøn taâm C, baùn kính a.

Giaûi :



- Ta coù : $\widehat{MCF} = \widehat{MBF} = 45^\circ$ (gt) $\Rightarrow$ töù giaùc BCFM noãi tieáp (hai ñænh cuõng nhìn MN döôùi moät goùc baèng nhau)
Ta coù : $\widehat{ECN} = \widehat{EDN} = 45^\circ$ (gt) $\Rightarrow$ töù giaùc ECDN noãi tieáp (hai ñænh cuõng nhìn EN döôùi moät goùc baèng nhau)
- Töù giaùc BCFM noãi tieáp (cmt) $\Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{MFC} = 180^\circ$ maø $\widehat{MBC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MFC} = 90^\circ \Rightarrow MF \perp NC$, töông töï ta cuõng ch÷uõng minh ñöôïc $NE \perp MC$

$\Rightarrow CK \perp MN$ (CK laø ñöôøng cao thòu ba)

Xeùt hai tam giaùc vuõng $\triangle MBC$ vaø $\triangle MKC$, ta ch÷uõng minh hai tam giaùc vuõng naøy baèng nhau theo tröôøng höïp goùc noãn caïnh huyeàn $\Rightarrow BC = KC \Rightarrow$ vaãy MN vuõng goùc vuøi baùn kính KC (KC =a) taïi K neân MN laø tieáp tuyeán vuøi ñöôøng troøn taâm C baùn kính a.

**Baøi
10**

**CAÙC BAØI TOAÙN VEÀ
TÒU GIAÙC NOÄI TIEÁP**

Baøi 1: Töø ñieåm A naèm ngoaøi ñöông troøn (O) , veõ hai tieáp tuyeán AB, AC (B,C laø hai tieáp ñieåm) vaø caùt tuyeán ADE (khoâng ñi qua taâm O) ñeán ñöông troøn (O) . BC caét AO taïi I . Chöùng minh raøng töu giaùc DIOE noäi tieáp.

Baøi 2: Töø ñieåm A naèm beân ngoaøi ñöông troøn (O), veõ hai tieáp tuyeán AB, AC ñeán ñöông troøn (B, C laø hai tieáp ñieåm). Veõ ñöông kính BD cuûa (O) . Tieáp tuyeán taïi D caét BC ôû E , OE caét AD taïi N. Chöùng minh 4 ñieåm A,O,N,C cuøng thuaộc moät ñöông troøn.

Baøi 3: Töø ñieåm A naèm ngoaøi ñöông troøn (O) , keû caùc tieáp tuyeán AB,AC ñeán ñöông troøn (B,C laø caùc tieáp ñieåm). Goïi H laø giao ñieåm cuûa OA vaø BC , EF laø moät daây cung ñi qua H . Chöùng minh töu giaùc AEOF noäi tieáp.

Baøi 4: Cho tam giaùc ABC nhoïn, ñöông troøn taâm O ñöông kính BC caét AB taïi E vaø AC taïi D . Goïi H laø giao ñieåm cuûa BD vaø EC. Tia AH caét BC taïi F.Chöùng minh töu giaùc EDOF noäi tieáp.

Baøi 5: Töø ñieåm A ôû ngoaøi ñöông troøn (O), veõ hai tieáp tuyeán AB, AC ñeán ñöông troøn (B, C laø caùc tieáp ñieåm), veõ $CD \perp AB$ taïi D vaø

caét (O) tại E , vẽ $EF \perp BC$ tại F và $EH \perp AC$ tại H. Gọi N là giao điểm của DF và EB, M là giao điểm của FH và EC. Chứng minh tứ giác MENF nội tiếp.

**Bài
11**

CAÙC BAÏI TOAÙN VEÀ CHÖÙNG MINH BA ÑIEÄM THÁÚNG HAØNG

Bài 1: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của BC. Tia HI cắt cung nhỏ BC tại K. Chứng minh A, O, K thẳng hàng.

Bài 2: Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có 3 góc nhọn. Đường tròn tâm O đường kính cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và D. Gọi H là giao điểm của BD và CE, K là giao điểm của AH và BC. Tia A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (O) với M, N là các tiếp điểm.

a) Chứng minh : $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$.

b) Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Bài 3: Tia phân giác M trên cạnh BC của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, kẻ các đường vuông góc MP, MQ, MR lần lượt xuống các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng P, Q, R thẳng hàng.

Bài 4: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD, CE cắt nhau tại H và lần lượt cắt đường tròn tại F và G. Gọi M là một điểm bất kỳ trên cạnh nhỏ BC, MG cắt AB tại I, IH cắt AC tại K. Chứng minh rằng ba điểm M, K, F thẳng hàng.

**Baøi
12**

MOÀT SOÁ ÑEÀ THI VAØO LÔÙP 10

ÑEÀ 1

Baøi 1. Giaûi caùc phöông trình vaø heä phöông trình sau:

a) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 4 = 0$

b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

c) $\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 9x - y = 7 \end{cases}$

Baøi 2: Thu goïn caùc bieäu thöïc sau :

a) $A = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

b) $B = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

Baøi 3: Moät khu vöôøn hình chöõ nhaät coù dieän tích baèng $675m^2$ vaø coù chu vi baèng 120m. Tìm chiều dài vaø chiều rộng của khu vöôøn.

Baøi 4: Cho phöông trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ vôùi m laø tham soá vaø x laø aán soá.

a) Giaûi phöông trình vôùi $m = 1$.

b) Tìm m ñeå phöông trình coù hai nghiệm phân biệt $x_1 ; x_2$.

c) Vôùi ñieàu kieän caâu (b) haõy tìm m ñeå bieäu thöïc $A = x_1x_2 - x_1 - x_2$ ñaët giaù trò nhoû nhaát.

Bài 5: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn ($AB < AC$). Nội tiếp tròn nội tiếp kính BC cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F. Biết BF cắt CE tại H và AH cắt BC tại D.

- Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp và AH vuông góc với BC.
- Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
- Gọi O là tâm nội tiếp tròn ngoại tiếp tam giác ABC và K là trung điểm của BC. Tính tỉ số $\frac{OK}{BC}$ khi tứ giác BHOC nội tiếp.
- Cho $HF = 3\text{cm}$, $HB = 4\text{cm}$, $CE = 8\text{cm}$ và $HC > HE$. Tính HC.

Phần 2

Bài 1: Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{x}{x - \sqrt{x+1}}\right) : \frac{x+2\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0$.

- Rút gọn biểu thức P.
- Tìm x để $P < 0$.

Bài 2: Cho phương trình: $x^2 + 2mx + m - 1 = 0$

- Giải phương trình khi $m = 2$
- Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Hãy xác định m để phương trình có nghiệm đồng.

Bài 3:

- Giải phương trình: $3x^2 + 3x - 2\sqrt{x^2 + x} = 1$
- Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = m - 2 \\ x + 2y = 3m + 4 \end{cases}$$
 - Giải hệ phương trình khi $m = 2$
 - Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 10$.

Bài 4: Cho nội tiếp tròn (O; R) có nội tiếp kính AB, điểm I nằm giữa hai điểm A và O. Kẻ nội tiếp thẳng vuông góc với AB tại I, nội tiếp thẳng này cắt nội tiếp tròn (O; R) tại M và N. Gọi S là giao điểm của hai nội tiếp thẳng BM và AN. Qua S kẻ nội tiếp thẳng song song với MN, nội tiếp thẳng này cắt các nội tiếp thẳng AB và AM lần lượt tại K và H. Hãy chứng minh:

- Tứ giác SKAM là tứ giác nội tiếp và $HS \cdot HK = HA \cdot HM$.

- b) KM là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).
c) Ba điểm H, N, B thẳng hàng.

Bài 5 : Cho $x^2 + y^2 = 6$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $m = x - \sqrt{5}y$.

PHẦN 3

Bài 1:

- a) Giải phương trình : $2(x-1) = 3-x$.
b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} y = x - 2 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$

Bài 2 :

- a) Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Tính $f(0)$; $f(2)$; $f(\frac{1}{2})$; $f(-\sqrt{2})$.
b) Cho phương trình ẩn x : $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1 ; x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 8$

Bài 3:

- a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.
b) Hai ô tô cùng xuất phát từ A đến B, ô tô nào nhanh hơn ô tô nào hai mỗi giờ 10km nên đến B sớm hơn ô tô nào hai 1 giờ. Tính vận tốc hai xe ô tô. Biết quãng đường AB dài 300km.

Bài 4: Cho đường tròn (O) dây AB không đi qua tâm O, trên cung nhỏ AB lấy điểm M (M không trùng với A, B) kẻ dây MN vuông góc với AB tại H, kẻ $MK \perp AN$ (K thuộc AN).

- a) Chứng minh bốn điểm A, M, H, K thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh MN là tia phân giác của góc BMK.
c) Khi M di chuyển trên cung nhỏ AB. Gọi E là giao điểm của HK và BN. Xác định vị trí của điểm M để $(MK \cdot AN + ME \cdot NB)$ có giá trị lớn nhất.

Bài 5: Cho x, y thỏa mãn $\sqrt{x+2} - y^3 = \sqrt{y+2} - x^3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $B = x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y + 10$.

Phần 4

Bài 1:

- Giai phương trình: $\frac{x-1}{2} + 1 = \frac{x+1}{4}$
- Giai hệ phương trình : $\begin{cases} x = 2y \\ x - y = 5 \end{cases}$

Bài 2:

- Rút gọn biểu thức : $A = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$. Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.
- Một hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 2cm và diện tích của nó là 15cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó.

Bài 3: Cho phương trình : $x^2 - 2x + m - 3 = 0$.

- Giai phương trình với $m=3$.
- Tính giá trị của m biết phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn điều kiện : $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = -12$.

Bài 4: Cho tam giác MNP cân tại M có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên nội tiếp nội tiếp trong (O;R). Tiếp tuyến tại N và P của nội tiếp trong lần lượt cắt tia MP và tia MN tại E và D.

- Chứng minh : $NE^2 = EP \cdot EM$
- Chứng minh tứ giác DEPN là tứ giác nội tiếp.
- Qua P kẻ nội tiếp vuông vuông góc với NM cắt nội tiếp trong (O) tại K (K khác trọng tâm P). Chứng minh rằng : $MN^2 + NK^2 = 4R^2$.

Bài 5 : Tìm giá trị lớn nhất ,nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{6-8x}{x^2+1}$$

NEÀ 5

Baøi 1:

- Tìm taát caù caùc giaù trò cuûax ñeå bieåu thòuc $\sqrt{2x-1}$ coù nghóa.
- Giaûi heä phöông trình :
$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$$
- Ruùt goïn : $\frac{1}{3-\sqrt{2}} + \frac{1}{3+\sqrt{2}}$

Baøi 2 : Cho haøm soá $y = -x^2$ coù ñoà thò (P) vaø $y = 2x+m$ coù ñoà thò (d) treân cuøng moät heä truïc toà ñoä.

- Veõ ñoà thò (P).
- Ñònh m ñeå (P) vaø (d) coù ñieåm chung duy nhaát. Veõ (d) vôùi m vöøa tìm ñöôïc.

Baøi 3:

- Ruùt goïn bieåu thòuc $M = \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ vôùi $a \neq 1$ vaø $a > 0$.
- Tính giaù trò cuûa M khi $a = \frac{1}{9}$.

Baøi 4: Cho ñöôøng troøn taâm O ñöôøng kính $AB = 2R$ vaø E laø ñieåm baát kyø treân ñöôøng troøn ñoù (E khaùc A vaø B). Ñöôøng phaân giaùc goùc AEB caét ñoaïn thaúng AB taïi F vaø caét ñöôøng troøn (O) taïi ñieåm thòu hai K khaùc A.

- Chöøng minh raøng ΔKAF vaø ΔKEA ñoàng daïng.
- Goïi I laø giao ñieåm cuûa ñöôøng trung troïc ñoaïn EF vôùi OE. Chöøng minh raøng ñöôøng troøn (I; IE) tieáp xuùc vôùi ñöôøng troøn (O) taïi E vaø tieáp xuùc vôùi ñöôøng thaúng AB taïi F.
- Goïi M vaø N laàn löôït laø giao ñieåm thòu hai cuûa AE, BE vôùi ñöôøng troøn (I; IE). Chöøng minh raøng : $MN \parallel AB$.
- Goïi P laø giao ñieåm cuûa NF vaø AK ; Q laø giao ñieåm cuûa MF vaø BK. Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa chu vi ΔKPQ theo R khi E chuyeån ñoäng treân ñöôøng troøn (O).

NEÀ 6

Baøi 1: Cho bieâu thòuc : $A = \left(\frac{6x+1}{x^2-6x} + \frac{6x-1}{x^2+6x} \right) \cdot \frac{x^2-36}{12x^2+12}$ (vòui $x \neq 0$; $x \neq -6$; $x \neq 6$)

a) Ruùt goïn bieâu thòuc A

b) Tíh giáu trò cuûa bieâu thòuc A vòui $x = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$

Baøi 2:

a) Giaûi caùc phöông trình :

$$x - \frac{15}{x} = 2\sqrt{x+5} - 2 = 0$$

b) Cho phöông trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$ coù hai nghieäm x_1 ; x_2 .
Tíh giáu trò cuûa m ñeå $10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ ñaët giáu trò nhoû nhaát.

Baøi 3 : veõ ñoà thò haøm soá $y = -0,5x^2$. Treân ñoà thò haøm soá y laáy hai ñieäm A vaø B coù hoaøn ñoà laàn löôit laø -1 vaø 2. Haõy vieát phöông trình ñöông thaúng AB.

Baøi 4: Cho ñöông troøn (O) vaø möät ñieäm A beân ngoaøi ñöông troøn sao cho $OA = 3R$. Veõ caùc tieáp tuyeán AB, AC ñeán (O) (B, C laø caùc tieáp ñieäm).

a) Chöùng minh töù giaùc OBAC noãi tieáp

b) Qua B keù ñöông thaúng song song vòui AC caét (O) taïi D (khaùc B). Ñöông thaúng AD caét (O) taïi E khaùc D. Chöùng minh : $AB^2 = AE \cdot AD$ vaø $CE^2 = EB \cdot EA$

c) Chöùng minh raøng tia ñoái cuûa tia EC laø phaân giaùc cuûa goùc BEA.

d) Tíh dieãn tích tam giaùc BDC theo R.

Baøi 5: Cho heä phöông trình : $\begin{cases} x + y = m & (1) \\ mx + y = 1 & (2) \end{cases}$

a) Giaûi heä phöông trình vòui $m = 2$

b) Xaùc ñònh giáu trò m ñeå hai ñöông thaúng coù phöông trình (1), (2) caét nhau taïi möät ñieäm treân parabol $y = -2x^2$.

NEÀ 7

Baøi 1: Cho bieâu thòuc $A = 1: \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right)$.

- Vôùi ñieàu kieän naøo cuûa x thì A xaùc ñònh.
- Ruùt goïn bieâu thòuc A
- Chöùng minh $A > 1$ vôùi moïi $x > 0$ vaø $x \neq 1$.

Baøi 2: Cho haøm soá $y = -3x^2$ coù ñoà thò (P) vaø ñöôøng thaúng (d) coù phöông trình $y = 2x - 5$.

- Veõ ñoà thò (P) vaø ñöôøng thaúng (d) treân cuøng moät heä truïc toïa ñoä Oxy .
- Xaùc ñònh toïa ñoä giao ñieám A vaø B cuûa ñoà thò (P) vaø ñöôøng thaúng (d).
- Tìm toïa ñoä ñieám M treân cung AB cuûa ñoà thò (P) sao cho tam giaùc MAB coù dieän tích lôùn nhaát.

Baøi 3: Hai ngöôøi ñi xe ñaïp khôù haønh cuøng moät luùc töø hai ñòa ñieám A vaø B treân cuøng moät ñöôøng thaúng. Ngöôøi naøy ñi tôùi ñieám xuaát phaùt cuûa ngöôøi kia roài trôù veà ñieám xuaát phaùt cuûa mình. Laàn gaëp nhau thòu nhaát caùch A 8km vaø laàn gaëp nhau thòu hai caùch B 5km. Tính quaøng ñöôøng AB, bieát vaãn toác cuûa hai ngöôøi khoâng ñoãi trong suôát thôøi gian ñi vaø veà.

Baøi 4: Cho ñöôøng troøn taâm O baùn kính R vaø ñöôøng thaúng (d) naèm ngoàì ñöôøng troøn , keû OH vuông goùc vôùi (d) taïi H. Bieát $OH = R\sqrt{2}$. Treân ñöôøng thaúng (d) laáy ñieám A (A khoâng tröng vôùi H) . Töø A veõ hai tieáp tuyéán AB, AC ñeán (O) (B,C laø tieáp ñieám).

- Chöùng minh naèm ñieám A, B, O, C, H cuøng thuoác moät ñöôøng troøn. Haõy xaùc ñònh taâm I.
- Tia OC caét ñöôøng thaúng d taïi E. Chöùng minh $\triangle EHC$ vaø $\triangle EAO$ ñoàng daïng.
- Bieát $OA = 2R$, treân ñoaïn AC laáy ñieám F sao cho $\widehat{FAO} = 15^\circ$. Tính dieän tích tam giaùc FAI theo R.

- d) Chứng minh rằng nội tiếp đường BC luôn đi qua điểm cố định K khi A di động trên nội tiếp đường d.

Bài 5: cho x, y thỏa mãn $4x + y = 1$. Chứng minh rằng : $4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$

ĐỀ 8

Bài 1: Cho biểu thức $A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a}$.

- Tìm điều kiện cho a, b để biểu thức A xác định.
- Rút gọn biểu thức A.

Bài 2

- Giaỉ hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases}$
- Giaỉ bất phương trình : $x + |x - 1| > 5$

Bài 3: Chứng minh rằng , nếu phương trình $x^2 + 2mx + n = 0$ có nghiệm thì phương trình $x^2 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 0$ cũng có nghiệm (với m, n, k là các tham số ; $k \neq 0$)

Bài 4: Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (d) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P) .

- Tìm a, b biết rằng (d) đi qua $A(-1 ; 3)$ và $B(2;0)$.
- Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với nội tiếp đường (d) với tìm. Viết phương trình (P).

Bài 5: Cho điểm M nằm ngoài nội tiếp tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi C là một điểm nằm trên cung lớn AB của nội tiếp tròn (O). Vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Gọi I là trung điểm của AH , CI cắt (O) tại điểm thứ hai E . ME cắt (O) tại điểm thứ hai F , MO cắt AB tại K.

- Chứng minh : $MO \perp AB$ tại K
- Chứng minh : $MA^2 = ME.MF$
- Chứng minh : $\widehat{AEK} = 90^\circ$
- Chứng minh OM tiếp xúc với nội tiếp tròn ngoại tiếp tam giác MEA.

NEÀ 9

Baøi 1:

- Giaûi phöông trình : $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 49$.
- Giaûi heä phöông trình : $\begin{cases} (x - y)^2 + 3(x - y) = 4 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$
- Giaûi baát phöông trình : $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$

Baøi 2:

- Tìm giaù trò cuûa x ñeä bieäu thöùc $\frac{1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 5}$ coù giaù trò lôùn nhaát.
- Cho bieäu thöùc $P = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2}$
Vôùi $|a| > |b| > 0$. Ruùt goïn bieäu thöùc P .

Baøi 3: Neáu hai voøi nöôùc cuøng chaùy vaøo moät caùi beä khoâng coù nöôùc thì sau 12 giöø ñày beä . Hai voøi nöôùc cuøng chaùy 8 giöø thì ngöôøi ta khoùa voøi I, coøn voøi II tieáp tuïc chaùy. Do taêng coâng suaát voøi II leân gaáp ñôi , neân voøi II ñeä chaùy ñày phaàn coøn laïi cuûa beä trong 3 giöø röôï. Hoûi neáu moãi voøi chaùy moät mình vôùi coâng suaát bình thöôøng thì phaûi bao laâu môùi ñày beä?

Baøi 4: Cho tam giaùc ABC coù caùc goùc ñieàu noïn ($AB \neq AC$) noãi tieáp trong nöôøng troøn (O) . H laø giao ñieäm cuûa caùc nöôøng cao AD, BE, CF vaø Q laø ñieäm ñoái xöùng cuûa H qua trung ñieäm ñoain BC.

- Chöùng minh $\widehat{BEF} = \widehat{BED} = \widehat{QBC}$.
- Chöùng minh Q naèm treân nöôøng troøn (O).
- Töø A keù Ax // EF , nöôøng thaúng Ax caét nöôøng thaúng BC ôû K . Chöùng minh Ax laø tieáp tuyeán cuûa nöôøng troøn (O) vaø $AK^2 = KB.KC$.
- Goïi I laø ñieäm ñoái xöùng cuûa O qua BC. Chöùng minh raêng $AO = HI$.

Baøi 5: Cho hai soá thöïc döông x, y thoûa maõn $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} \geq 23$. Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa bieäu thöùc $P = 8x + \frac{6}{x} + 18y + \frac{7}{y}$.

Ề 10

Bài 1: Rút gọn biểu thức $A = \frac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b} + \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$
(vôùi $a > 0$, $b > 0$, và $a \neq b$).

Bài 2: Cho phương trình : $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

- Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt
- Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 2 và tính nghiệm kia.
- Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{4}$$

Bài 3:

- Tìm tọa độ giao điểm của parabol $y = \frac{1}{3}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{6}(x + 21)$
- Vòng giao nhau của k để đường thẳng $y = k(x-1)$ tiếp xúc với parabol $y = \frac{1}{3}x^2$

Bài 4: Một mặt phẳng đi qua trục OO' của một hình trụ, phần mặt phẳng nằm bên ngoài hình trụ là một hình chữ nhật có diện tích là 72cm^2 . Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ, biết rằng đường kính đáy bằng một nửa đường cao.

Bài 5: Cho một điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm). Vẽ đường kính BD của đường tròn (O), AD cắt đường tròn (O) ở E .

- Chứng minh : $AB^2 = AE \cdot AD$
- Kẻ đường kính EK của đường tròn (O), KC cắt DE ở I . Chứng minh I là trung điểm của DE .
- Gọi H là giao điểm của OA với BC . Chứng minh HC là tia phân giác của góc DHE .

- d) Gọi S là giao điểm của hai tia OI và BC . Chứng minh SD là tiếp tuyến của (O) .

NEÀ 11

Bài 1 : Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

- Rút gọn P .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P
- Tìm x để biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ có hệ số góc k .

- Viết phương trình đường thẳng (d) . Chứng minh với mọi giá trị của k , (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B .
- Gọi hoành độ của A và B là x_1 và x_2 , chứng minh $|x_1 - x_2| \geq 2$
- Chứng minh tam giác OAB vuông

Bài 3: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) ($AB < AC$). Đường tròn tâm O_1 tiếp xúc với đường tròn (O) tại M , tiếp xúc với hai cạnh AB , AC lần lượt tại L và K . Gọi E là giao điểm của hai đường MK với đường tròn (O) .

- Chứng minh ME là tia phân giác của góc $\widehat{AMC}$.
- Tia phân giác Mx của góc $\widehat{BMC}$ cắt LK tại I . Chứng minh rằng bốn điểm M, I, K, C cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh CI là tia phân giác của góc $\widehat{BCA}$

Bài 4: Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện:
 $x+y+z+xy+yz+zx = 6$

Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$.