

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ I
MÔN : TOÁN LỚP 9
ĐỀ 4

BÀI I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $10(2x-1) = (3x+7)(2x-1)$

$$\Leftrightarrow (3x+7)(2x-1) - 10(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(3x+7-10) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(3x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 3x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{\frac{1}{2}; 1\}$.

2) Giải phương trình: $\frac{2x-2}{x-3} - \frac{x-5}{x+3} = \frac{-21}{x^2-9}$

ĐKXĐ: $x \neq 3$ và $x \neq -3$.

Mẫu thức chung: $(x-3)(x+3)$.

Phương trình tương đương:

$$(2x-2)(x+3) - (x-5)(x-3) = -21$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 6x - 2x - 6) - (x^2 - 3x - 5x + 15) = -21$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 - x^2 + 8x - 15 + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-12 \end{cases} \text{ (Cả hai đều thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; -12\}$.

3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x-2y=5 & (1) \\ (x+5)(2y-4)=(2x-6)(y-1) & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có: $2xy - 4x + 10y - 20 = 2xy - 2x - 6y + 6$

$$\Leftrightarrow -4x + 10y - 20 = -2x - 6y + 6$$

$$\Leftrightarrow -2x + 16y = 26$$

$$\Leftrightarrow -x + 8y = 13 \Leftrightarrow x = 8y - 13$$

Thế vào (1): $3(8y-13) - 2y = 5$

$$\Leftrightarrow 24y - 39 - 2y = 5 \Leftrightarrow 22y = 44 \Leftrightarrow y = 2.$$

Với $y = 2 \Rightarrow x = 8(2) - 13 = 3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 2)$.

BÀI II (2,0 điểm)

1) Tìm giá trị của A tại $x=4$

Với $x=4$ (thỏa mãn ĐKXĐ), ta có $\sqrt{x} = 2$.

$$A = \frac{2\sqrt{4}-1}{\sqrt{4}+1} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2+1} = \frac{3}{3} = 1.$$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

$$B = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{6}{x-1}$$

$$B = \frac{(2\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) + 6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{2x - 2\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 5 - x - \sqrt{x} + 6}{x-1}$$

$$B = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \text{ (đpcm).}$$

3) Tìm x để $P = A \cdot B = \frac{9}{4}$

$$P = A \cdot B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{Để } P = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(2\sqrt{x}-1) = 9(\sqrt{x}-1)$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{x} - 4 = 9\sqrt{x} - 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ).}$$

Vậy $x = 25$.

BÀI III (2,0 điểm)

1) Gọi chiều dài mảnh vườn là x (m), chiều rộng là y (m) ($x > y > 0$).

Chu vi là $50m \Rightarrow 2(x+y) = 50 \Rightarrow x+y = 25 \Rightarrow y = 25-x$.

Diện tích ban đầu: $S = x(25-x)$.

Chiều dài sau khi tăng: $x+2$. Chiều rộng sau khi tăng: $(25-x)+3 = 28-x$.

Diện tích mới tăng thêm $72m^2$:

$$(x+2)(28-x) = x(25-x) + 72$$

$$\Leftrightarrow 28x - x^2 + 56 - 2x = 25x - x^2 + 72$$

$$\Leftrightarrow 26x + 56 = 25x + 72 \Leftrightarrow x = 16.$$

Vậy chiều dài là 16m, chiều rộng là $25-16 = 9m$.

Diện tích mảnh vườn là: $16 \cdot 9 = 144(m^2)$.

2) Gọi năng suất dự định của công nhân đó là x (sản phẩm/giờ, $0 < x \leq 60$).

Thời gian dự định hoàn thành 120 sản phẩm là: $\frac{120}{x}$ (giờ).

Năng suất thực tế là: $x+10$ (sản phẩm/giờ).

Thời gian thực tế làm 150 sản phẩm là: $\frac{150}{x+10}$ (giờ).

Đổi 6 phút = 0,1 giờ. Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{150}{x+10} = \frac{120}{x} + 0,1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1500}{x+10} = \frac{1200}{x} + 1$$

$$\Leftrightarrow 1500x = 1200(x+10) + x(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 1500x = 1200x + 12000 + x^2 + 10x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 290x + 12000 = 0$$

Giải phương trình bậc hai ta được $x_1 = 50$ (thỏa mãn) và $x_2 = 240$ (loại vì $x \leq 60$).

Vậy theo dự định mỗi giờ công nhân đó làm được 50 sản phẩm.

BÀI IV (3,5 điểm)

1) Ta có AB, AC là hai tiếp tuyến của (O) nên $\angle ABO = \angle ACO = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ABOC$ có $\angle ABO + \angle ACO = 180^\circ$ nên $ABOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO . Suy ra 4 điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Vì $AB = AC$ (tính chất tiếp tuyến) và $OB = OC = R$, nên AO là đường trung trực của $BC \Rightarrow AO \perp BC$ tại H .

Xét tam giác vuông ABO có đường cao BH : áp dụng hệ thức lượng ta có $OB^2 = OH \cdot OA$.

Mà $OB = R \Rightarrow OA \cdot OH = R^2$ (đpcm).

3) Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle ABO$ vuông tại B có đường cao BH : $AB^2 = AH \cdot AO$.

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ANB$ có: $\angle A$ chung; $\angle ABM = \angle ANB$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BM). $\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle ANB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AN} \Rightarrow AB^2 = AM \cdot AN$.

Từ đó suy ra $AM \cdot AN = AH \cdot AO$ (cùng bằng AB^2).

4) Kéo dài AD cắt BC tại F .

Vì BD là đường kính nên $\angle BCD = 90^\circ \Rightarrow CD \perp BC$.

Mà $AO \perp BC \Rightarrow AO \parallel CD$.

Trong $\triangle BCD$, O là trung điểm BD , $OH \parallel CD \Rightarrow H$ là trung điểm BC .

Vì $AO \parallel CD$, theo định lý Thales trong $\triangle FCD$: $\frac{AO}{CD} = \frac{FA}{FD}$.

Theo định lý Thales trong $\triangle FBC$: $\frac{AH}{CD} = \frac{FA}{FD}$.

Suy ra $\frac{AO}{CD} = \frac{AH}{CD} \cdot \frac{AO}{AH}$... (Cách khác nhanh hơn):

Vì $AO \parallel CD$, xét $\triangle BFD$: $AO \parallel CD$ và H là trung điểm BC , suy ra A là trung điểm BF .
Ta có $CE \perp BD$ và $AB \perp BD$ (do AB là tiếp tuyến) $\Rightarrow CE \parallel AB$.

Xét $\triangle DAB$ có $EK \parallel AB \Rightarrow \frac{EK}{AB} = \frac{DE}{DB}$ (1).

Xét $\triangle DAF$ có $KC \parallel AF \Rightarrow \frac{KC}{AF} = \frac{DK}{DA}$ (2).

Theo hệ quả Thales trong $\triangle DAB$ thì $\frac{DE}{DB} = \frac{DK}{DA}$.

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{EK}{AB} = \frac{KC}{AF}$.

Mà A là trung điểm $BF \Rightarrow AB = AF$, do đó $EK = KC$.
Vậy K là trung điểm của CE .

BÀI V (0,5 điểm)

1) Chứng minh nếu $x > 0$ thì $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2}$

(Lưu ý: Đề bài ghi x là số thực, nhưng với $x = -1$ thì bất đẳng thức sai, nên ta xét $x > 0$)

Áp dụng BĐT AM-GM cho 3 số dương: $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

2) Chứng minh $a(\frac{a}{2} + \frac{1}{bc}) + b(\frac{b}{2} + \frac{1}{ca}) + c(\frac{c}{2} + \frac{1}{ab}) \geq \frac{9}{2}$

Vế trái $VT = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{bc} + \frac{b^2}{2} + \frac{b}{ca} + \frac{c^2}{2} + \frac{c}{ab} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$.

Đặt $t = \sqrt[3]{abc} > 0$. Theo AM-GM: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3t^2$.

$\Rightarrow VT \geq \frac{3t^2}{2} + \frac{3t^2}{t^3} = \frac{3t^2}{2} + \frac{3}{t} = \frac{3t^2}{2} + \frac{3}{2t} + \frac{3}{2t}$.

Áp dụng AM-GM cho 3 số dương này:

$VT \geq 3\sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} \cdot \frac{3}{2t} \cdot \frac{3}{2t}} = 3\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$. (đpcm)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no text or other markings on the paper.

Tài liệu Toán lớp 9
