

BÀI GIẢNG GIÁO KHOA

Thầy giáo : Nguyễn Quốc Tùng

Toán 11

TẬP HAI

§1

PHÉP TÍNH LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

1. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Định nghĩa:

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$ (trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

Lũy thừa của a với số mũ r là:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ví dụ 1:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{1/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}$$

2. Lũy thừa với số mũ thực

Khái niệm:

Để định nghĩa a^α với α là một số vô tỉ (ví dụ $3^{\sqrt{2}}$), ta sử dụng một dãy số hữu tỉ r_n có giới hạn là α . Khi đó:

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$$

Chú ý quan trọng về điều kiện cơ sở:

Với số mũ nguyên dương: Cơ sở $a \in \mathbb{R}$.

Với số mũ 0 và nguyên âm: Cơ sở $a \neq 0$.

Với số mũ hữu tỉ và số mũ thực: Cơ sở $a > 0$.

3. Tính chất của lũy thừa với số mũ thực

Cho $a, b > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ta có các tính chất tương tự như lũy thừa với số mũ nguyên:

- a) 1. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ (Nhân hai lũy thừa cùng cơ số)
- b) 2. $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ (Chia hai lũy thừa cùng cơ số)

- c) 3. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$ (Lũy thừa của lũy thừa)
 d) 4. $(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$ (Lũy thừa của một tích)
 e) 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$ (Lũy thừa của một thương)

4. So sánh các lũy thừa

Cho cơ số a và các số mũ α, β :

Trường hợp $a > 1$: $a^\alpha > a^\beta \rightarrow \alpha > \beta$ (Cùng chiều)

Trường hợp $0 < a < 1$: $a^\alpha > a^\beta \rightarrow \alpha < \beta$ (Ngược chiều)

Ví dụ 2: So sánh $3^{\sqrt{2}}$ và $3^{\sqrt{3}}$

Vì $3 > 1$ và $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ nên $3^{\sqrt{2}} < 3^{\sqrt{3}}$.

5. Luyện tập (bài tập mẫu)

Dạng 1: Rút gọn biểu thức

Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{x}}{x^{\frac{1}{6}}}$ với $x > 0$.

Giải:

$$P = \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}} = x^{\frac{5}{6} - \frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

Dạng 2: Tính giá trị biểu thức

Tính $A = 25^{1,5} + (0,125)^{-\frac{1}{3}}$

Giải:

$$A = (5^2)^{3/2} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-1/3} = 5^{2 \cdot \frac{3}{2}} + (8)^{1/3} = 5^3 + \sqrt[3]{8} = 125 + 2 = 127.$$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa biến (Sử dụng hằng đẳng thức)

Ví dụ 3: Cho \$a, b\$ là các số dương. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a+b-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$$

Hướng dẫn giải:

Để giải bài này, ta nhận xét các biểu thức dưới dạng lũy thừa của $a^{\frac{1}{2}}$ và $b^{\frac{1}{2}}$:

$$\text{Ta có: } a = (a^{\frac{1}{2}})^2 \text{ và } b = (b^{\frac{1}{2}})^2$$

$$\text{Ta có: } a^{\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^3 \text{ và } b^{\frac{3}{2}} = (b^{\frac{1}{2}})^3$$

Áp dụng hằng đẳng thức hiệu hai bình phương và tổng hai lập phương:

1. Phân thức thứ nhất:

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$$

2. Phân thức thứ hai:

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a+b-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}})^3 + (b^{\frac{1}{2}})^3}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + (a^{\frac{1}{2}})^2 + (b^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b} = a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$$

3. Kết quả:

$$A = (a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) - (a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) = 0$$

Dạng 4: So sánh các số mũ thực (Trường hợp cơ số nhỏ hơn 1)

Ví dụ 4: Không dùng máy tính bỏ túi, hãy so sánh hai số sau:

$$M = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{3}} \quad \text{và} \quad N = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1,7}$$

Để so sánh hai lũy thừa cùng cơ số, ta thực hiện các bước:

1. Xét cơ số: Cơ số ở đây là $a = \frac{\pi}{4}$.

Vì $\pi \approx 3,14$ nên $\frac{\pi}{4} \approx 0,785$.

$$\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} < 1.$$

2. So sánh số mũ:

Ta có $\sqrt{3} \approx 1,732$.

Để thấy $1,732 > 1,7 \Rightarrow \sqrt{3} > 1,7$.

3. Kết luận:

Vì cơ số $a = \frac{\pi}{4}$ nằm trong khoảng $(0;1)$ nên hàm số lũy thừa sẽ nghịch biến (ngược chiều).

Do $\sqrt{3} > 1,7$ nên $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1,7}$.

Vậy $M < N$.

