

BÀI GIẢNG GIÁO KHOA

Thầy giáo : Nguyễn Quốc Tùng

Toán 11

TẬP MỘT

§2

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. Định nghĩa

a. Giới hạn hữu hạn

Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$.

Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần tới x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số $\{x_n\}$ trong tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$, mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Nhận xét:

+ Nếu $f(x) = c$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$;

+ Nếu $f(x) = x$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$.

b. Giới hạn vô cực

Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$.

Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực ∞ khi x dần tới x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số $\{x_n\}$ trong tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$

Khi đó ta viết: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ hoặc $f(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow x_0$.

II. Định lý về giới hạn

Định lý 1. Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L \pm M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = L.M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [c.f(x)] = c.L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M} \text{ với } M \neq 0.$$

Định lý 2.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ với $L \geq 0$.

III. Giới hạn một bên

a. Giới hạn phải

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi x tiến về x_0 nếu mọi số (x_n) trong khoảng $(x_0; b)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim (f(x_n)) = L$.

Khi đó, ta viết: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0^+$.

b. Giới hạn trái

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên trái là số thực L khi x tiến về x_0 nếu mọi số (x_n) trong khoảng $(a; x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim (f(x_n)) = L$.

Khi đó, ta viết: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0^-$.

Nhận xét:

Nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ và ngược lại.

 PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Giới hạn tại x_0

Hàm số xác định tại $x = x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Ví dụ 1. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 2.1 - 1 = 1.$$

Ví dụ 2. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 5x + 8}{x + 1} \right)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 5x + 8}{x + 1} \right) \\ &= \frac{1^2 - 5.1 + 8}{1 + 1} = 2. \end{aligned}$$

Dạng 2. Giới hạn dạng $\frac{0}{0}$

Phương pháp: Phân tích thành nhân tử.

Hằng đẳng thức $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

Nghiệm phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ví dụ 3. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 4} \\ &= \frac{2 + 2}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^2 - 4}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\left(x + \frac{7}{2}\right)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\left(x + \frac{7}{2}\right)}{x + 2} \\ &= \frac{2\left(2 + \frac{7}{2}\right)}{2 + 2} = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Phương pháp: Nhân liên hợp.

$$A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B} = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2};$$

$$A + B = \frac{A^3 + B^3}{A^2 - AB + B^2}.$$

Ví dụ 6. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 2^2}{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x + 3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \frac{1}{(3 + 3)(\sqrt{3+1} + 2)} = \frac{1}{24}.$$

Dạng 3. Giới hạn một bên

Phương pháp:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ tức là } \begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x > x_0 \end{cases} \text{ (bên phải);}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ tức là } \begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x < x_0 \end{cases} \text{ (bên trái);}$$

Hàm số có giới hạn tại $x = x_0$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Ví dụ 7. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1}$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty;$$

$$\forall x \rightarrow 1^+ \text{ thì } \begin{cases} 2x - 3 \rightarrow -1 < 0 \\ x - 1 \rightarrow 0^+ \end{cases}.$$

Ví dụ 8. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$ từ đó suy ra $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)}{x-2} = 1. \end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$ nên không tồn tại L .

Ví dụ 9. Cho $f(x) = \begin{cases} 5x^4 - 6x^2 - x & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 3x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x^4 - 6x^2 - x) = -2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 3x) = -2 \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$.

Dạng 4. Giới hạn vô cùng

Phương pháp: Nhóm lũy thừa mũ cao nhất.

Lưu ý: $x \rightarrow -\infty$ thì $x = -\sqrt{x^2} = \sqrt[3]{x^3}$.

Ví dụ 10. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 - 3x^2 + 1)$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 - 3x^2 + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$$

$$\forall \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = 2 > 0 \end{cases}$$

Ví dụ 11. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x)$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty$$

$$\forall \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = -\sqrt{2} + 1 < 0 \end{cases}.$$

Dạng 5. Giới hạn $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp: Nhóm nhân tử ở cả tử và mẫu rồi rút gọn.

Ví dụ 12. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{3x^2 - x + 2}$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{3x^2 - x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0.$$

Ví dụ 13. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x^2 + 1}{5 - 3x^2}$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x^2 + 1}{5 - 3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 \left(2 + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right)}{x^2 \left(\frac{5}{x^2} - 3 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \frac{2 + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{\frac{5}{x^2} - 3} = +\infty$$

$$\forall \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{\frac{5}{x^2} - 3} = -\frac{2}{3} < 0 \end{cases}.$$

Dạng 6. Giới hạn $\infty - \infty$

Phương pháp: Nhân liên hợp.

$$A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B} = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2};$$

$$A + B = \frac{A^2 - B^2}{A - B} = \frac{A^3 + B^3}{A^2 - AB + B^2}.$$

Ví dụ 14. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{0}{1 + 1} = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 15. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{27x^3 - x^2} - 3x)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{27x^3 - x^2} - 3x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27x^3 - x^2 - 27x^3}{(\sqrt[3]{27x^3 - x^2})^2 + 3x \cdot \sqrt[3]{27x^3 - x^2} + 9x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{27 - \frac{1}{x}}\right)^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{27 - \frac{1}{x}} + 9} = -\frac{1}{27}. \end{aligned}$$

