

BÀI GIẢNG GIÁO KHOA

Thầy giáo : Nguyễn Quốc Tùng

Toán 11

TẬP MỘT

§1

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm giới hạn dãy số

Dãy số (u_n)

* Khi $n \rightarrow +\infty$ thì $u_n \rightarrow a$ ta nói giới hạn của dãy số bằng a .

* Kí hiệu: $\lim u_n$ hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2. Một số kết quả thường sử dụng

i) $\lim \frac{1}{n^k} = 0, k > 0;$

ii) $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1;$

iii) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

3) Tính chất

Cho $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$. Khi đó:

* $\lim(u_n + v_n) = a + b;$

* $\lim(u_n - v_n) = a - b.$

* $\lim(u_n \cdot v_n) = ab.$

* $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b}$ với $b \neq 0$.

* $\lim C = C$ với C là hằng số.

4) Định lí kẹp

Với $\begin{cases} |u_n| \leq v_n \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = 0$

 PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Giới hạn của dãy số có dạng đa thức

Phương pháp:

Nhóm lũy thừa cao nhất của n ra ngoài rồi sử dụng công thức:

$$\text{i) } \lim \frac{1}{n^k} = 0 \text{ với } k > 0$$

$$\text{ii) } \lim (a.n^k) = \begin{cases} +\infty & \text{ khi } a > 0 \\ -\infty & \text{ khi } a < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tính $\lim (2n + 3)$.

Lời giải

$$\lim (2n + 3) = \lim n \left(2 + \frac{3}{n} \right) = +\infty.$$

$$\forall \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \left(2 + \frac{3}{n} \right) = 2 + 0 = 2 > 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Tính $\lim (5 - 3n^2)$.

Lời giải

$$\lim (5 - 3n^2) = \lim n^2 \left(\frac{5}{n^2} - 3 \right) = -\infty.$$

$$\forall \begin{cases} \lim n^2 = +\infty \\ \lim \left(\frac{5}{n^2} - 3 \right) = 0 - 3 = -3 < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3. Tính $\lim (2n^3 - n^2 + 3)$.

Lời giải

$$\lim (2n^3 - n^2 + 3) = \lim n^3 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3} \right) = +\infty$$

$$\forall \begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3} \right) = 2 - 0 + 0 = 2 > 0 \end{cases}$$

Dạng 2. Giới hạn của dãy số có dạng phân thức

Phương pháp: Rút lũy thừa cao nhất của cả tử và mẫu rồi sử dụng công thức:

$$\text{i) } \lim \frac{1}{n^k} = 0 \text{ với } k > 0.$$

$$\text{ii) } \lim n^k = +\infty.$$

$$\text{iii) } \begin{cases} \lim u_n = a > 0 \\ \lim v_n = 0; v_n > 0 \forall n \end{cases} \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty;$$

$$\text{iv) } \begin{cases} \lim u_n = b < 0 \\ \lim v_n = 0; v_n > 0 \forall n \end{cases} \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = -\infty.$$

Ví dụ 4. Tính $\lim \frac{2n-5}{n+1}$.

Lời giải

$$\lim \frac{2n-5}{n+1} = \lim \frac{n\left(2-\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{2-\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2-0}{1+0} = 2.$$

Ví dụ 5. Tính $\lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$.

Lời giải

$$\lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1} = \lim \frac{n^2\left(3+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \lim \frac{3+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{3+0+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 6. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+3}{2n^2+3n^3+4}$.

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+3}{2n^2+3n^3+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(7+\frac{3}{n}\right)}{n^3\left(\frac{2}{n}+3+\frac{4}{n^3}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{7+\frac{3}{n}}{\frac{2}{n}+3+\frac{4}{n^3}} \right) = 0$$

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7+\frac{3}{n}}{\frac{2}{n}+2+\frac{4}{n^3}} \right) = \frac{7}{3} \end{array} \right.$$

Ví dụ 7. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-11n+1}{n^2-2}$.

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-11n+1}{n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3\left(2-\frac{11}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{2-\frac{11}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{2}{n^2}} = +\infty$$

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{11}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{2}{n^2}} = 2 > 0 \end{array} \right.$$

Dạng 3. Giới hạn dãy số chứa căn thức

Phương pháp: Nhân liên hợp

$$\bullet \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}.$$

$$\bullet \sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}.$$

$$\bullet \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A - B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{AB} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2}.$$

$$\bullet \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \frac{A + B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 - \sqrt[3]{AB} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2}.$$

$$\bullet \sqrt[3]{A} - B = \frac{A - B^3}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A.B} + B^2}.$$

Ví dụ 8. Tính $\lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right).$

Lời giải

$$\lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right) = \lim \frac{n^2 + 2n + 3 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n}$$

$$= \lim \frac{2n + 3}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1}$$

$$= \frac{2 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ví dụ 9. Tính $\lim \left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n \right).$

Lời giải

$$\lim \left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n \right) = \lim \frac{4n^2 + n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4 + 0} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 10. Tính $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \right)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \right) &= \lim \frac{n^3 + n^2 - n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} \right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + n^2} + n^2} \\ &= \lim \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dạng 4. Giới hạn dãy số chứa hàm số mũ

Phương pháp:

+ Chia cả tử và mẫu cho a^n với a là cơ số lớn nhất.

+ Sau đó sử dụng công thức: $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Ví dụ 11. Tính $\lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n} &= \lim \frac{3^n - 10 \cdot 5^n}{2 \cdot 2^n + 5^n} \\ &= \lim \frac{\left(\frac{3}{5} \right)^n - 10}{2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + 1} = \frac{0 - 10}{0 + 1} = -10. \end{aligned}$$

Dạng 5. Tổng cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp:

+ Định nghĩa: Cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} q < 1 \\ n \rightarrow +\infty \end{cases}$ là cấp số nhân lùi vô hạn.

+ Công thức: $S = \lim S_n = \lim u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = u_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{u_1}{1 - q}$.

Ví dụ 12. Tính $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

Lời giải

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

