

BÀI GIẢNG GIÁO KHOA

Thầy giáo : Nguyễn Quốc Tùng

Toán 11

TẬP MỘT

§3

HÀM SỐ LIÊN TỤC

 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI ĐIỂM

◆ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

◆ Hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = x_0 \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$.

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MIỀN

◆ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

◆ Mọi hàm số sơ cấp xác định trên khoảng nào thì sẽ liên tục trên khoảng đó.

Ví dụ:

a) $y = x^2 + x - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

b) $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$ liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

◆ Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó

+ Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ liên tục tại ;

+ Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

 PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Cho $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{nếu } x \neq x_0 \\ f_2(x) & \text{nếu } x = x_0 \end{cases}$. Xét tính liên tục tại $x = x_0$.

Phương pháp:

1) Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$;

2) Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$;

3) So sánh $f(x_0)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

+ Nếu bằng nhau thì liên tục tại x_0 ;

+ Nếu không bằng nhau thì gián đoạn tại x_0 .

Ví dụ 1. Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại:

a) $x = 3$

b) $x = 2$

Lời giải

$$\text{a) } f(3) = \frac{3^2 - 3 \cdot 3 + 2}{3 - 2} = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{3^2 - 3 \cdot 3 + 2}{3 - 2} = 2;$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ nên hàm số liên tục tại $x = 3$.

$$\text{b) } f(2) = 4 \cdot 2 - 3 = 5;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1;$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 2$

Ví dụ 2. Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$.

Lời giải

$$f(1) = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3 - 4}{(x - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4};$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

Ví dụ 3. Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 4x} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{1}{8}(x + a) & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 2$.

Lời giải

$$f(2) = \frac{1}{8}(a + 2);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 4x + 3)}{x(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 3}{x(x + 2)} = \frac{4 + 8 + 3}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8};$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x = 2 \text{ thì } \frac{1}{8}(a + 2) = \frac{15}{8}$$

$$\Leftrightarrow a + 2 = 15 \Leftrightarrow a = 13.$$

Dạng 2. Cho $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x > x_0 \\ f_2(x) & \text{nếu } x = x_0 \\ f_3(x) & x < x_0 \end{cases}$. Xét tính liên tục tại $x = x_0$

Phương pháp:

$$1) \text{ Tính } f(x_0) = f_2(x_0);$$

$$2) \text{ Tính } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f_3(x);$$

$$3) \text{ Tính } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_1(x);$$

4) So sánh các đại lượng vừa tính

+ Nếu tất cả bằng nhau thì hàm số liên tục tại x_0 ;

+ Nếu $\exists$ một đại lượng khác các đại lượng còn lại thì hàm số gián đoạn tại x_0 .

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x+1} + 7}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại $x = 1$.

Lời giải

$$f(1) = \frac{\sqrt{1+1} + 7}{3} = \frac{7 + \sqrt{2}}{3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+1} + 7}{3} = \frac{7 + \sqrt{2}}{3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x+2} = \frac{4}{3}.$$

Vì $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên hàm số đã cho gián đoạn tại $x = 1$.

Ví dụ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{ khi } x > 1 \\ \frac{3}{4} & \text{ khi } x = 1 \\ \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}{3x^2 - 14x + 11} & \text{ khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại $x = 1$.

Lời giải

$$f(1) = \frac{3}{4};$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-\sqrt{x+3}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)^2 - x - 3}{(x-1)(x+1+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1+\sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x+1+\sqrt{x+3}} = \frac{3}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}{3x^2 - 14x + 11} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x^2 - 3x - 6)}{(x-1)(3x - 11)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3x - 6}{3x - 11} = \frac{3 - 3 - 6}{3 - 11} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Vì $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

Dạng 3. Xét tính liên tục trên khoảng, đoạn

Phương pháp:

+ $f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc $(a; b)$;

+ Mọi hàm số sơ cấp xác định trên khoảng nào thì liên tục trên khoảng đó;

$$+ f(x) \text{ liên tục trên } [a; b] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } (a; b) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{cases}.$$

Ví dụ 6. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{7}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

+ Với $x \neq -1$ thì $f(x) = \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1}$ xác định $\forall x \neq -1$;

Suy ra hàm số liên tục trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

+ Với $x = -1$ thì $f(x) = \frac{7}{3}$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 3)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 - x + 1} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Vì $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ nên hàm số liên tục tại $x = -1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 7. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 1} & \text{khi } x < 2 \\ 2 - x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

+ Với $x < 2$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 1}$ xác định $\forall x < 2$

Suy ra hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$.

+ Với $x > 2$ thì $f(x) = 2 - x$ xác định trên $(2; +\infty)$

Suy ra hàm số liên tục trên $(2; +\infty)$.

+ Với $x = 2$, ta có $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 - 2 = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x^3 - 8)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{2(x^2+2x+4)} = \frac{-1}{24};$$

Vì $f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

Vậy hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$; gián đoạn tại $x = 2$.

Dạng 4. Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp:

Định lí: $\begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } (a; b) \\ f(a).f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (a; b).$

Chú ý:

+ Nếu chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất k nghiệm thuộc $(a; b)$ thì ta chia $(a; b)$ thành k khoảng trái dấu.

+ Phương trình $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ có tối đa n nghiệm.

+ Nếu phương trình chứa tham số ta thường chọn x để triệt tiêu tham số.

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists a > 0$ để $f(a) > 0$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists b < 0$ để $f(b) < 0$.

Ví dụ 8. Chứng minh $x^5 - 2x^3 + 1 = 0$ có nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(0) = 1 > 0; f(-2) = (-2)^5 - 2(-2)^3 + 1 < 0;$$

$\Rightarrow f(0).f(-2) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2; 0)$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 9. Chứng minh $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-5) = -109 \\ f(-1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-5).f(-1) < 0$$

Suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-5; -1)$ (1)

$$f(-1).f(1) = 3.(-1) < 0$$

Suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1; 1)$ (2)

$$f(1).f(2) = (-1).3 < 0$$

Suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(1; 2)$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra phương trình có ít nhất 3 nghiệm phân biệt.

Mà $f(x)$ là đa thức bậc ba nên $f(x) = 0$ có nhiều nhất 3 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm.

