

Bài 1. (1,0 điểm) Giải các phương trình lượng giác:

a) $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$;

b) $\frac{1}{\sin^2 x} - (\sqrt{3} - 1)\cot x - (\sqrt{3} + 1) = 0$ và $x \in (0; \pi)$.

Giải

a) $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\frac{1}{\sin^2 x} - (\sqrt{3} - 1)\cot x - (\sqrt{3} + 1) = 0$.

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(1 + \cot^2 x) - (\sqrt{3} - 1)\cot x - (\sqrt{3} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cot^2 x - (\sqrt{3} - 1)\cot x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = -1 \\ \cot x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (tm) \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi (tm) \end{cases}$$

Do $x \in (0; \pi)$ nên $x = \frac{3\pi}{4}; x = \frac{\pi}{6}$.

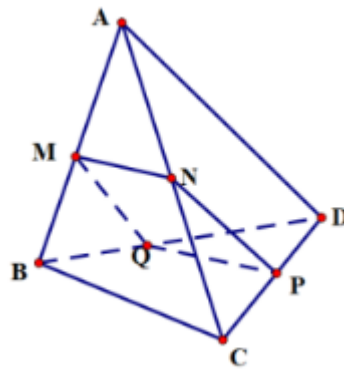
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x \in \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{6} \right\}$.

Bài 2. (1,0 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB .

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

Giải



a) $(\alpha) \parallel BC, BC \subset (ABC)$ và (α) cắt (ABC) tại MN nên $MN \parallel BC$.

$(\alpha) \parallel BC, BC \subset (BCD)$ và (α) cắt (BCD) tại PQ nên $PQ \parallel BC$.

Suy ra: $MN \parallel PQ$.

$(\alpha) \parallel AD, AD \subset (ABD)$ và (α) cắt (ABD) tại MQ nên $MQ \parallel AD$.

$(\alpha) \parallel AD, AD \subset (ACD)$ và (α) cắt (ACD) tại NP nên $NP \parallel BC$.

Suy ra: $MQ \parallel NP$.

Do đó, $MNPQ$ là hình bình hành.

b) $MNPQ$ là hình thoi khi $MN = NP$.

Ta có:
$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$$

$$\frac{NP}{AD} = \frac{CN}{AC} \text{ hay } \frac{MN}{AD} = \frac{CN}{AC}$$

Mà $\frac{AN}{AC} + \frac{CN}{AC} = 1$ nên $\frac{MN}{BC} + \frac{MN}{AD} = 1$

Suy ra:
$$MN = \frac{AD \cdot BC}{AD + BC}.$$

Bài 3. (1,0 điểm) Cho α là góc nhọn và $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$. Tìm x để $\tan \alpha = \frac{1}{2}x$.

Giải

Ta có: $0 < \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ \Rightarrow 0 < \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\frac{x-1}{2x}} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x > 0$

Lại có $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$, vì $0 < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x+1}{2x}} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\text{Khi đó } \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sqrt{\frac{x}{x+1}}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{4}x^2 \text{ (do } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (do } x > 0)$$

$$\text{Vậy giá trị } x \text{ cần tìm là } x = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$