

Bài 1. (1,0 điểm)

$$a) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

$$b) \frac{3}{\cos^2 x} - 2\sqrt{3} \tan x - 6 = 0 \quad (\text{Điều kiện: } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}))$$

$$\Leftrightarrow 3(1 + \tan^2 x) - 2\sqrt{3} \tan x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{thỏa mãn điều kiện xác định}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = \frac{m+1}{2} \end{cases}$$

Xét $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vì } x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \text{ nên phương trình đã cho có một}$

ng nghiệm là $x = \frac{\pi}{6}$.

Do đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $\cos 2x = \frac{m+1}{2}$ phải có đúng hai nghiệm phân biệt khác $\frac{\pi}{6}$ trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Xét hàm số $y = \cos 2x$ có bảng biến thiên trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ như sau:

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$y = \cos 2x$		1	$\frac{1}{2}$	0

Từ BBT suy ra yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases} 0 \leq \frac{m+1}{2} < 1 \\ \frac{m+1}{2} \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy $m \in [-1; 1) \setminus \{0\}$.