

CHUYÊN ĐỀ 1: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử bậc hai, bậc ba, bậc bốn

Phương pháp giải chung

Dùng máy tính nhằm nghiệm

hoặc tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức có 1 nghiệm $x=1$

Tổng hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ thì đa thức có 1 nghiệm là $x=-1$

1 số HĐT đáng nhớ:

$$1, (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a-b)^2 + 4ab$$

$$2, (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab$$

$$3, a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

$$4, a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$5, a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$6, 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

$$7, (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$8, a^4 + b^4 = (a+b)(a-b)[(a+b)^2 - 2ab]$$

$$9, a^4 + b^4 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2(ab)^2.$$

$$10, a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

$$11, a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

$$12, a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1).$$

Dạng 1.1: Phân tích đa thức thành nhân tử bậc hai

Cách 1: Tách hạng tử bậc nhất bx

Tính a.c rồi phân tích a.c ra tích của hai thừa số $ac = a_1c_1 = a_2c_2 = \dots$

Chọn ra hai thừa số có tổng bằng b , chẳng hạn : $ac = a_1c_1$ với $a_1 + c_1 = b$

Tách $bx = a_1x + c_1x$

Dùng phương pháp nhóm số hạng để phân tích tiếp

Cách 2: Tách hạng tử bậc ax^2

Ta thường làm xuất hiện hằng đẳng thức: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Cách 3: Tách hạng tử tự do c

Ta tách c thành c_1 và c_2 để dùng phương pháp nhóm hạng tử hoặc tạo ra hằng đẳng thức bằng cách c_1 nhóm với ax^2 còn c_2 nhóm với bx .

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $3x^2 + 8x + 4$

HD:

Ta có: $3.4 = 12 = 2.6$, mà $2 + 6 = 8$

Nên ta được: $3x^2 + 8x + 4 = 3x^2 + 6x + 2x + 4 = (3x + 2)(x + 2)$

b. $3x^2 - 8x + 4$

HD:

Cách 1: Tách hạng tử thứ 2:

$$3x^2 - 8x + 4 = 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 3x(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(3x - 2)$$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất: $3x^2 - 8x + 4 = (4x^2 - 8x + 4) - x^2 = (x - 2)(3x - 2)$

c. $x^2 - 11x + 8$

HD: $x^2 - 11x + 8 = (x - 4)(x - 7)$

d. $x^2 + 5x - 24$

HD: $x^2 + 5x - 24 = (x + 8)(x - 3)$

e. $x^2 - 5x + 4$

HD: $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$

f) $3x^2 - 7x + 2$;

HD:

$$3x^2 - 7x + 2 = 3x^2 - 6x - x + 2 =$$

$$= 3x(x - 2) - (x - 2)$$

$$= (x - 2)(3x - 1).$$

Bài 2: Phân tích các đa thức thành nhân tử: $3x^2 + 8x + 4$

HD:

$$\text{Ta có: } 3x^2 + 8x + 4 = (4x^2 + 8x + 4) - x^2 = (2x + 2)^2 - x^2 = (x + 2)(3x + 2)$$

Bài 3: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $3x^2 + 8x + 4$

HD:

$$3x^2 + 8x + 16 - 12 = (3x^2 - 12) + (x + 16) = (x + 2)(3x + 2)$$

b) $4x^2 - 4x - 3$

HD:

$$4x^2 - 4x - 3 = (4x^2 - 4x + 1) - 4 = (2x - 1)^2 - 2^2 = (2x + 1)(2x - 3)$$

c) $9x^2 + 12x - 5$

HD:

$$9x^2 + 12x - 5 = (9x^2 + 12x + 4) - 9 = (3x + 2)^2 - 3^2 = (3x + 5)(3x - 1)$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 - x - 2001.2002$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^2 - x - 2001(2001 + 1) &= x^2 - x + 2001^2 - 2001 = (x^2 - 2001^2) - (x + 2001) \\ &= (x - 2001)(x + 2001) - (x + 2001) = (x + 2001)(x - 2002)\end{aligned}$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 - x + 2017.2018$

HD :

$$\text{Ta có: } x^2 - x + 2017.2018 = x^2 + 2017x - 2018x + 2017.2018 = (x + 2017)(x - 2018)$$

Dạng 1.2: Phân tích đa thức thành nhân tử bậc ba

Chú ý:

Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì $f(x)$ có một nhân tử là $x - 1$

Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì $f(x)$ có một nhân tử là $x + 1$

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + 4a^2 - 29a + 24$

HD:

Bấm máy nhận thấy đa thức có ba nghiệm là 1, 3 và -8, nên sẽ có chứa các nhân tử $(a - 1)$, $(a - 3)$ và $(a + 8)$,

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } a^3 + 4a^2 - 29a + 24 &= (a^3 - a^2) + (5a^2 - 5a) + (-24a + 24) \\ &= a^2(a - 1) + 5a(a - 1) - 24(a - 1) = (a - 1)(a^2 + 5a - 24) = (a - 1)(a - 3)(a + 8)\end{aligned}$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

HD :

Bấm máy ta thấy đa thức có ba nghiệm nguyên là -1, -2, -3, nên ta phân tích :

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

HD :

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$, nên có nhân tử là : $(3x - 1)$

$$\begin{aligned} \text{nên ta có : } 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 &= 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5 \\ &= x^2(3x - 1) - 2x(3x - 1) + 5(3x - 1) = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5) \end{aligned}$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

HD :

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$, nên có nhân tử là : $(2x - 1)$

$$\begin{aligned} \text{Nên ta có : } 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 &= 2x^3 - x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3 \\ &= x^2(2x - 1) - 2x(2x - 1) + 3(2x - 1) = (2x - 1)(x^2 - 2x + 3) \end{aligned}$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3 - 14x^2 + 4x + 3$

HD :

Bấm máy tính cho ta nghiệm là : $x = -\frac{1}{3}$ nên có 1 nhân tử là : $(3x + 1)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } 3x^3 - 14x^2 + 4x + 3 &= 3x^3 + x^2 - 15x^2 - 5x + 9x + 3 \\ &= x^2(3x + 1) - 5x(3x + 1) + 3(3x + 1) = (3x + 1)(x^2 - 5x + 3) \end{aligned}$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

HD :

Cách 1 : bấm máy tính cho ta nghiệm là : $x = -1$ và $x = -2$

$$\text{Nhu vậy ta có : } x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x + 1)(x + 2)^2$$

Cách 2 : Nhận xét : Tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là: $x + 1$

$$\text{Nhu vậy ta có : } x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x^2 + 4x) + (4x + 4) = (x + 1)(x + 2)^2$$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - x^2 - 4$

HD :

Ta nhận thấy nghiệm của $f(x)$ nếu có thì $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Chỉ có $f(2) = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm của $f(x)$ nên $f(x)$ có một nhân tử là $x - 2$.

Do đó ta tách $f(x)$ thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là $x - 2$

Cách 1: $x^3 - x^2 - 4 = (x^3 - 2x^2) + (x^2 - 2x) + (2x - 4) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$

Cách 2: $x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4 = (x^3 - 8) - (x^2 - 4) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$

Bài 8: Phân tích đa thức $P(x) = x^3 - 2x - 4$ thành nhân tử .

HD:

Ta nhận thấy đa thức $P(x) = x^3 - 2x - 4$ có số nghiệm là $x = 2$

Do đó, ta có $P(x) = (x - 2)Q(x)$

Chia đa thức $P(x) = x^3 - 2x - 4$ cho nhị thức $x - 2$, ta được thương số là

$$Q(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

Suy ra $P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$

Vậy $P(x) = x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 + x^2 + 4$

HD :

Ta có các ước của 4 là: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$

Nhận thấy $x = -2$ là nghiệm của đa thức vậy đa thức có 1 nhân tử là: $x - (-2)$
 $= x + 2$

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - x^2 + 4 = (x + 2)\underbrace{(x^2 - x + 2)}_{>0}$$

Hoặc: $= (x^3 + 8) + (x^2 - 4) = (x + 2)(x^2 - x + 2)$

b) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

HD :

Nhận thấy $x = -1$ là nghiệm của đa thức nên có 1 nhân tử là: $x + 1$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x^3 - x^2) - (4x^2 - 4x) + (4x - 4) = (x-1)(x-2)^2$$

c) $x^3 - 19x - 30$

HD :

Ta có $x = -3$ là nghiệm nên có nhân tử là $x + 3$

$$x^3 - 19x - 30 = x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x - 10x - 30 = (x+3)(x^2 - 3x - 10) = (x+3)(x+2)(x-5)$$

d) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

HD :

Ta có: $x = -1$ là nghiệm của đa thức nên có nhân tử là: $x + 1$

$$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = x^3 + x^2 + 3x^2 + 3x - 10x - 10 = (x+1)(x-2)(x+5)$$

e) $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

HD:

Các ước của 5 là: $\pm 1; \pm 5$. Nhận thấy đa thức không có nghiệm nguyên, ta đi tìm nghiệm hữu tỷ của đa thức

$$x = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in U(-5) \\ q \in U(3) \end{cases}$$

Ta thấy nghiệm của đa thức là $x = \frac{1}{3}$ nên có nhân tử $x - \frac{1}{3}$ hay $3x - 1$

Vậy: $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5 = (3x-1)(x^2 - 2x + 5)$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^3 - 3x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)^3$

HD :

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)^3 &= 2x^3 - 3x^2y + y^3 = 2x^2(x-y) - y(x-y)(x+y) = (x-y)(2x^2 - y^2 - xy) \\ &= (x-y)(x-y)(2x+y) = (x-y)^2(2x+y) \end{aligned}$$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

HD :

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4$$

$$= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x - 1)(x - 2)^2$$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$