

BÀI GIẢNG GIÁO KHOA

Thầy giáo : Nguyễn Quốc Tùng

Toán 10

TẬP MỘT

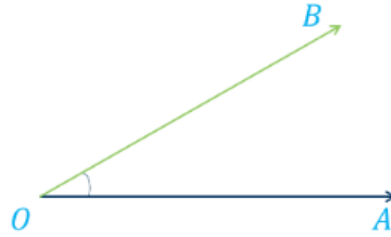
§6

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Định nghĩa

Tích vô hướng của hai vector có cùng điểm đầu

Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng.

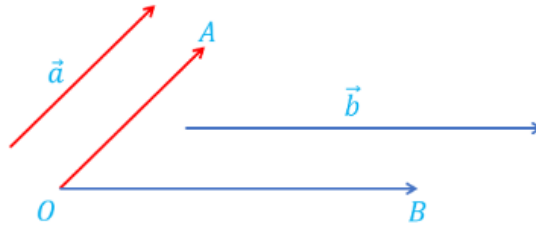


- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA , OB và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số, kí hiệu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

Tích vô hướng của hai vector tùy ý

Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



- Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý:

- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$;
- Khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$;
- Khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Ví dụ 1: Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 7, (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$;

b) $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 9, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$.

Giải

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos (\vec{a}, \vec{b}) = 6 \cdot 7 \cdot \cos 45^\circ = 42 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 21\sqrt{2}$.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos (\vec{a}, \vec{b}) = 8 \cdot 9 \cdot \cos 150^\circ = 72 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -36\sqrt{3}$.

2. Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và số thực k tùy ý, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Nhận xét:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 3$, $AD = 4$, $\hat{A} = 60^\circ$. M là trung điểm của CD .
Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \right) = \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 \\ &= \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 \\ &= AD^2 - \frac{1}{2}AD \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAD} - \frac{1}{2}AB^2 \\ &= 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

Xin chào
Hẹn gặp lại các em

