

BÀI GIẢNG GIÁO KHOA

Thầy giáo : Nguyễn Quốc Tùng

Toán 11

TẬP MỘT

§3

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

1. Hàm số chẵn - lẻ

Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ với tập xác định D .

+ Hàm số $y=f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in D$ thì $f(-x)=f(x)$.

+ Hàm số $y=f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in D$ thì $f(-x)=-f(x)$.

Chú ý

+ Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

2. Hàm số tuần hoàn

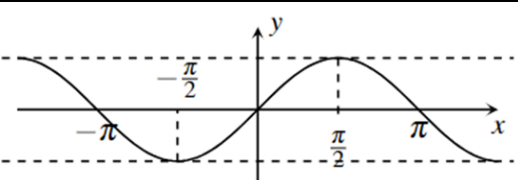
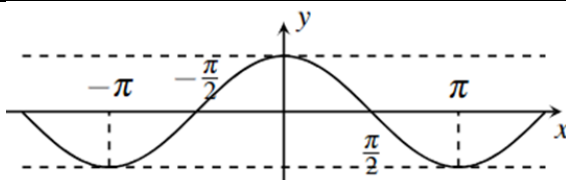
Cho hàm số $y=f(x)$ với tập xác định D . Hàm số $y=f(x)$ được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$, ta có:

$$x+T \in D \text{ và } x-T \in D$$

$$f(x+T)=f(x).$$

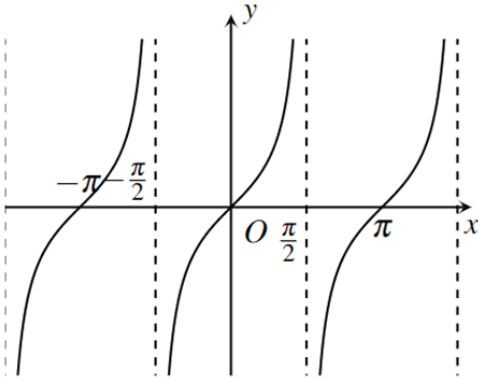
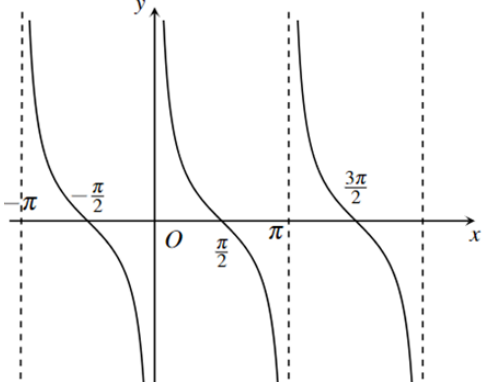
Số T dương, nhỏ nhất thỏa mãn (nếu có) các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số đó.

3. Hàm số sin, hàm số cosin

	Hàm số sin	Hàm số cosin
TXĐ	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Đồ thị		
Tính chẵn, lẻ	hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O	hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục tung
Chu kì tuần hoàn	2π	2π
Đơn điệu	đồng biến trên mỗi khoảng	đồng biến trên mỗi khoảng

	$(-\pi/2+k2\pi; \pi/2+k2\pi);$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi/2+k2\pi; 3\pi/2 + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.	$(-\pi+k2\pi; k2\pi);$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi+k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
--	---	--

4. Hàm số tang, hàm số cotang

	Hàm số tang	Hàm số cotang
TXĐ	$D=\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi k \in \mathbb{Z}\}$	$D=\mathbb{R} \setminus \{k\pi k \in \mathbb{Z}\}$
Đồ thị		
Tính chẵn, lẻ	hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O	hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O
Chu kì tuần hoàn	π	π
Đơn điệu	đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi/2 + k\pi; \pi/2+k\pi)$, với $k \in \mathbb{Z}$.	nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi+k\pi)$, với $k \in \mathbb{Z}$.

PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tập xác định của hàm số

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ xác định khi } g(x) \neq 0.$$

$$y = \sqrt{f(x)} \text{ xác định khi } f(x) \geq 0.$$

$$y = \tan[u(x)] \text{ xác định khi } u(x) \text{ xác định và } u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$y = \cot[u(x)] \text{ xác định khi } u(x) \text{ xác định và } u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dạng 2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

✧ Tìm TXĐ D của hàm số và kiểm tra D là tập đối xứng?

- Nếu $x \in D$ và $-x \in D$ thì D đối xứng;
- Nếu D không đối xứng thì hàm số không chẵn, không lẻ.

✧ Tính $f(-x)$, chỗ nào có x , ta thay bằng $-x$.

- Nếu $f(-x) = f(x)$ thì hàm số chẵn;
- Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì hàm số lẻ;
- Còn lại, hàm số không chẵn, không lẻ.

Ví dụ 2. Hàm số $y = \frac{\cos x}{x^3}$ là hàm số lẻ hay không?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ là tập đối xứng.

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x^3} = -\frac{\cos x}{x^3} = -f(x).$$

Do đó hàm số $y = \frac{\cos x}{x^3}$ là hàm số lẻ.

Dạng 3. Tính tuần hoàn của hàm số

✎ Chứng minh hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn:

Xét hàm số $y = f(x)$, tập xác định D , ta dự đoán số thực dương T_0 sao cho

$$\begin{cases} \forall x \in D : x - T_0 \in D; x + T_0 \in D \\ f(x + T_0) = f(x) \end{cases}$$

✎ Dự đoán chu kỳ tuần hoàn:

✎ Dự đoán chu kỳ tuần hoàn:

- Hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- Hàm số $y = \tan x$; $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
- Hàm số $y = \sin(ax + b)$; $y = \cos(ax + b)$, ($a \neq 0$) tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \tan(ax + b)$; $y = \cot(ax + b)$, ($a \neq 0$) tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = F(x) = m.f(x) + n.g(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T là "bội chung nhỏ nhất" của a và b .

Ví dụ 3. Chu kỳ của hàm số $y = \cos 2x$ là bao nhiêu?

Lời giải

Chu kỳ của hàm số $y = \cos 2x$ là: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Dạng 4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Cách 1: Bất đẳng thức cơ bản

- $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$
- $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$
- $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$
- $0 \leq |\sin x|, |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

Cách 2: Điều kiện có nghiệm

- $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.
- $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.
- $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Cách 3: Lập bảng biến thiên để đưa ra kết luận

Ví dụ 4. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) - 1$ lần lượt là bao nhiêu?

Lời giải

$$-1 \leq \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq 3 \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) - 1 \leq 2 \Rightarrow -4 \leq y \leq 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) - 1$ là 2 khi $x = -\frac{\pi}{4}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) - 1$ là -4 khi $x = \frac{3\pi}{4}$.



